

MSE, 이공계생을 위한 확률과 통계

## **[연습문제 답안 이용 안내]**

- 본 연습문제 답안의 저작권은 안승철과 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

## Chapter 05 연습문제 해답

### 5.1

(a)

가능한 표본	$\bar{x}$
$\{1, 2, 3\}$	2
$\{1, 2, 4\}$	2.33
$\{2, 3, 4\}$	3

(b)

$\bar{x}$	$p(\bar{x})$
2	1/3
2.33	1/3
3	1/3

(c)

$$\begin{aligned}
 E(\bar{x}) &= \sum \bar{x} p(\bar{x}) \\
 &= 2 \times \frac{1}{3} + 2.33 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} \doteq 2.443
 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
 Var(\bar{x}) &= \sum \bar{x}^2 p(\bar{x}) - \bar{x}^2 \\
 &= 2^2 \times \frac{1}{3} + 2.33^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{3} - (2.443)^2 \\
 &\doteq 0.1747
 \end{aligned}$$

(e)  $\frac{N-n}{N-1} = \frac{4-3}{4-1} = \frac{1}{3}$

### 5.3

표본평균  $\bar{x}$ 의 표준오차  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 는 표본크기  $n$ 이 커지면 작아지게 된다.

## 5.5

랜덤하게 추출한 10개월간의 평균을  $\bar{X}$ 라 하자. 그러면  $\bar{X}$ 는  $N\left(5650, \frac{700^2}{10}\right)$ 을 따른다고 할 수 있다. 따라서  $P\left(\left|\frac{\bar{X}-5650}{700/\sqrt{10}}\right| \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - \mu| \leq 210) &= P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{700/\sqrt{10}}\right| \leq 210 \cdot \frac{\sqrt{10}}{700}\right) \\ &\doteq P(|Z| \leq 0.95) \\ &= 1 - 2P(Z > 0.95) \doteq 0.6578 \end{aligned}$$

## 5.7

신장의 표본평균을  $\bar{x}$ 라고 하면, 구하고자 하는 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(168 \leq \bar{x} \leq 172) &= P\left(\frac{168-170}{6/\sqrt{36}} \leq Z \leq \frac{172-170}{6/\sqrt{36}}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.9544 \end{aligned}$$

## 5.9

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \bar{x}_1 + \bar{x}_2 &\sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \\ \text{(b)} \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 &\sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \end{aligned}$$

## 5.11

(a)

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x(1-2t)}{2}} dx$$

여기서  $y = \frac{x(1-2t)}{2}$  로 두면,  $dx = \frac{2}{1-2t} dy$  ( $t < \frac{1}{2}$ ) 이므로

$$M_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{2y}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} \frac{2}{1-2t} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (1-2t)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} dy$$

$$= (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

(b)  $M_X'(t) = -\frac{n}{2} (1-2t)^{-\frac{n}{2}-1} (-2)$

$$= n(1-2t)^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$E(X) = M_X'(0) = n$$

(c)  $M_X''(t) = \left(-\frac{n}{2}\right) \left(-\frac{n}{2}-1\right) (1-2t)^{-\frac{n}{2}-2} (-2)^2$

$$E(X^2) = M_X''(0)$$

$$= 4 \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n+2}{2}\right) = n(n+2)$$

$$\text{Var}(X) = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2$$

$$= n(n+2) - n^2 = 2n$$

5.13

(a)  $t$ -분포의 확률밀도함수는

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

이므로  $E(X)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} x dx \end{aligned}$$

이므로, 이때  $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-1} = t$ 로 두면  $x^2 = n(1-t)t^{-1}$ ,  $xdx = \left(-\frac{n}{2t^2}\right)dt$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \frac{2}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_1^0 \sqrt{n} (1-t)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{n+1}{2}} \left(-\frac{n}{2t^2}\right) dt \\
 &= \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1-1} (1-t)^{\frac{1}{2}+1-1} dt \\
 &= \frac{n}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} B\left(\frac{n}{2}-1, \frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{n}{2}-1 \text{ 에서 } n > 2\right) \\
 &= n \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\
 &= n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \\
 &= \frac{n}{n-2}
 \end{aligned}$$

이 된다. 그러므로,  $Var(X)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \frac{n}{n-2} - 0^2 \\
 &= \frac{n}{n-2}
 \end{aligned}$$

### 5.15

자유도가  $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 인  $F$ 분포이다.

### 5.17

표본비율  $\hat{p} = \frac{X}{n} \approx N\left(0.9, \frac{0.9 \times 0.1}{100}\right)$ 을 따른다. 그러므로

$Z = \frac{\hat{p} - 0.9}{0.03} \sim N(0, 1)$ 을 따르게 된다.

따라서

$$\begin{aligned}
 P(|\hat{p} - 0.9| \leq 0.05) &= P\left(\frac{|\hat{p} - 0.9|}{0.03} \leq \frac{5}{3}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{5}{3}\right) \\
 &\approx 2 \times 0.9525 - 1 = 0.905
 \end{aligned}$$

## 5.19

먼저 다음과 같이 자료를 입력한다.

	A	B
1	X	P(X)
2	1	0.25
3	2	0.25
4	3	0.25
5	4	0.25

[데이터분석]⇒[난수생성]을 통해 난수를 생성한다.

난수 생성

변수의 개수(N): 2 확인

난수의 개수(B): 100 취소

분포(D): 이산 분포 도움말(H)

종료(A) SA 종료(A)

난수 시드(R):

출력 옵션

☒ 출력 범위(O): \$D\$1 출력 범위(O)

☐ 새로운 워크시트(P):

☐ 새로운 통합 문서(W):

이때 분포는 이산분포를 선택하고 종료(A)에 위에서 입력한 내용을 선택하여 설정해준다.  
그러면 원하는 결과를 얻을 수 있다.