

CHAPTER 03 미분

SECTION 3.1 미분계수와 변화율

유제 3-1

시간	평균변화율
9	2
10	1
11	2
12	1
13	2
14	-3
15	-2

유제 3-2

12

유제 3-3

-2

유제 3-4

$$\frac{1-a^2}{(a^2+1)^2}$$

유제 3-5

풀이 생략

유제 3-6

$$y = x$$

3.1 연습문제

01

0

02

순간변화율 : 1

접선의 방정식 $y = x - 1$

03

다른 점에서 만나지 않는다.

04

다른 점은 존재하지 않는다.

05

초기비용

CHAPTER 03 미분

06

$x = 10$ 에서 1g을 더 생산하는 데 드는 추가비용 : 215

$x = 20$ 에서 1g을 더 생산하는 데 드는 추가비용 : 415

07

$x = a$ 일 때 한계비용은 $C'(a) = 20a + 5$ 이다.

08

0

09

순간변화율 : 0

접선의 방정식 : $y = 1$

10

곡선에 접하는 접선을 그을 수 없다.

11

$x = 0$ 에서 연속

12

평균변화율 : 1

순간변화율 : $f'(0) = \infty$, $f'(1) = \frac{1}{3}$

13

$x = 0$ (y 축)

14

$f(3) = 39$, $f'(3) = 10$

15

$a = \frac{1}{2}$, 두 곡선이 접하는 점은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ 이다.

CHAPTER 03 미분

SECTION 3.2 함수로서의 도함수

유제 3-7

$$f'(x) = 6x + 4$$

유제 3-8

$f(x)$ 는 0을 제외한 모든 점에서 미분가능하다.

유제 3-9

$$f''(x) = \frac{2}{(x+5)^3}$$

3.2 연습문제

01

검은색 실선 : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

파란색 실선 : $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

파란색 점선 : $f''(x)$

02

$$f'(x) = \frac{-3}{x^4}$$

03

$x=0$ 에서 미분불가능하다.

04

모든 점에서 미분 가능하다.

05

$$b = -4, \quad k = 4$$

06

$$y' = 3x^2 - 8x$$

$$y'' = 6x - 8$$

$$y''' = 6$$

$$y^{(4)} = 0$$

CHAPTER 03 미분

07

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$y'' = \frac{-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$y''' = \frac{3}{(2x+1)^2\sqrt{2x+1}}$$

$$y^{(4)} = \frac{-15}{(2x+1)^3\sqrt{2x+1}}$$

08

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

09

$$y = 2x - 1$$

CHAPTER 03 미분

SECTION 3.3 기본적인 미분 공식

유제 3-10

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x + 6$$

유제 3-11

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

유제 3-12

$$f'(x) = -\frac{4x^2+12}{x^5}$$

유제 3-13

$$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

유제 3-14

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

유제 3-15

$$f'(x) = \sec^2 x$$

유제 3-16

$$f^{(2021)}(x) = \cos x$$

유제 3-17

$$f'(x) = -\cot x (\csc x + \sin x)$$

유제 3-18

$$f'(x) = \tan x + x \sec^2 x - \frac{\cos x}{(\sin x + 2)^2}$$

3.3 연습문제

01

$$y' = 12x^{11} + 21x^6 - 12x^2 + 1$$

02

$$y' = 3(x^2+3)(5x^5-2x+3) + (3x+2)(2x)(5x^5-2x+3) + (3x+2)(x^2+3)(25x^4-2)$$

03

CHAPTER 03 미분

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

04

$$y' = \frac{x^3 - 6}{x^3}$$

05

$$y' = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

06

$$y' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$$

07

$$y' = \frac{\cos x - x \cdot \sin x}{x + \tan x} - \frac{(x \cdot \cos x + 1)(1 + \sec^2 x)}{(x + \tan x)^2}$$

08

$$y = \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}$$

09

$$y = \frac{1}{2}x$$

10

$$y = \frac{1}{2}x$$

11

$$y = 2n\pi + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, 2n\pi + \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \quad (n \text{은 정수})$$

$$y = f\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) \quad (n \text{은 정수})$$

12

$$3(g(x))^2 g'(x)$$

13

$$\frac{-3g'(x)}{\{g(x)\}^4}$$

14

$$y' = -\csc^2 x$$

15

$$y' = \sec x \cdot \tan x$$

16

$$y' = \csc x (1 - x \cdot \cot x + \csc x)$$

17

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cdot \cos 2x$$

18

CHAPTER 03 미분

$$a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$$

19

$$a = 1, b = 0, c = -3, d = 0$$

CHAPTER 03 미분

SECTION 3.4 연쇄법칙

유제 3-19

$$y' = 168x^5(4x^6 + 1)^6$$

유제 3-20

$$y' = 4\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)^3 \left\{-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2}\right\}$$

유제 3-21

$$y'' = -(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}}$$

유제 3-22

$$y' = -3\sin x \cdot \cos^2 x \cdot \cos(x^3) - 3x^2 \sin(x^3) \cdot \cos^3 x$$

유제 3-23

$$y' = -x(\csc x^2)^{\frac{3}{2}} \cot x^2 + \frac{\sec^2(\sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x+1}}$$

3.4 연습문제

01

$$y' = 6x(x^2 + 2)^2(x^3 - x + 1)^4 + (x^2 + 2)^3 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1)$$

02

$$y' = \frac{-4(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 - x + 1)^5}$$

03

$$y' = \frac{-16(1 - \sin(4x))^3 \cos(4x)}{(x^2 + 1)^4} - \frac{8(1 - \sin(4x))^4 \cdot x}{(x^2 + 1)^5}$$

04

$$y' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \cos(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

05

$$y' = \sec(ax) + ax \sec(ax) \tan(ax) - (2x) \sin(x^2 + b^2)$$

06

$$y' = 2 \cos(mx) (-m \sin(mx)) \sin^2(nx) + \cos^2(mx) \cdot 2n (\sin(nx)) \cos(nx)$$

07

$$y' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \cdot \cos(nx) - n \sin^n x \cdot \sin(nx)$$

CHAPTER 03 미분

08

증명 생략

09

증명 생략

10

증명 생략

11

$$y'' = f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)$$

12

$$H'(0) = 2$$

CHAPTER 03 미분

SECTION 3.5 음함수 미분법

유제 3-24

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 2y^2}{4xy + 3y^2}$$

유제 3-25

$$y = \frac{5}{3}(x - 5) + 3$$

유제 3-26

(a) $3x^2 + 2y \frac{dy}{dx} = 0$

(b) $y = \pm 3$

(c) $y = -6(x - 2) + 1$

유제 3-27

$$\begin{aligned} y'' = & -\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \left\{ 1 + \frac{\cos(x+y) + y^2 \sin x}{2y \cos x - \cos(x+y)} \right\} - \frac{2y \sin x}{\cos(x+y)} \left\{ \frac{\cos(x+y) + y^2 \sin x}{2y \cos x - \cos(x+y)} \right\} - \frac{y^2 \cos x}{\cos(x+y)} \\ & + \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \left\{ 1 + \frac{\cos(x+y) + y^2 \sin x}{2y \cos x - \cos(x+y)} \right\} \left\{ \frac{\cos(x+y) + y^2 \sin x}{2y \cos x - \cos(x+y)} \right\} \\ & - \frac{2 \cos x}{\cos(x+y)} \cdot \left\{ \frac{\cos(x+y) + y^2 \sin x}{2y \cos x - \cos(x+y)} \right\}^2 + \frac{2y \sin x}{\cos(x+y)} \left\{ \frac{\cos(x+y) + y^2 \sin x}{2y \cos x - \cos(x+y)} \right\} \end{aligned}$$

3.5 연습문제

01

$$y' = \frac{2x}{4y - 1}$$

02

$$y' = -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$$

03

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

04

$$y' = \frac{3ay - 3x^2}{3y^2 - 3ax}$$

05

CHAPTER 03 미분

$$y' = \frac{-y \sin(xy) - 2x}{2y + x \sin(xy)}$$

06

$$(\pm \sqrt{3}, \pm \sqrt{3}), (\pm \sqrt{3}, \mp \sqrt{3}) \quad (\text{복부호동순})$$

07

$$\text{두 곡선이 만나는 각을 } \theta \text{라 하면 } \theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 0.927\dots(\text{rad})$$

08

$$f(0) = 2, \quad f(1) = 1$$

09

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$$

10

증명 생략

11

$$y'' = \frac{-3x^2}{y^3} + \frac{3x^6}{y^7}$$

12

$$G(r, \theta) = 2r^4 - 25 \cdot r^2 \cdot \cos(2\theta) = 0$$

13

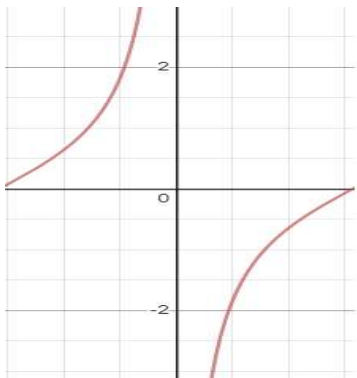
$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-25r \sin(2\theta)}{4r^2 - 25 \cos(2\theta)}$$

14

$$y = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} \left(x - r \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) + r \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

15

접선의 기울기를 나타내는 그래프는 다음과 같다.



16

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \pm \frac{1}{2} \right)$$

17

CHAPTER 03 미분

- (i) 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 에서 접선의 방정식 : $y = (-1)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (ii) 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 에서 접선의 방정식 : $y = (1)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (iii) 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 에서 접선의 방정식 : $y = (\sqrt{3})\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{2}$
- (iv) 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ 에서 접선의 방정식 : $y = (-\sqrt{3})\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{1}{2}$

CHAPTER 03 미분

SECTION 3.6 역함수 미분법

유제 3-28

$$f'(x) = e^{x^2}(\sinh x + 2x \cosh x)$$

유제 3-29

$$y' = ax^{a-1} + x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

유제 3-30

$$y' = \sqrt[3]{e^x + 1} \cdot (\cos x + 2)^{-4} \times \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{4 \sin x}{\cos x + 2} \right) + x^e (3x + 1)^5 \left(\frac{e}{x} + \frac{15}{3x + 1} \right)$$

유제 3-31

$$y' = \frac{2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}}$$

유제 3-32

$$y' = \sinh x \cos^{-1}(\sqrt{x}) - \frac{\cosh x}{2\sqrt{x - x^2}}$$

유제 3-33

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sin^{-1} x + 1)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3.6 연습문제

01

$$y' = e^{(\sin x + 1)^3} \cdot 3(\sin x + 1)^2 \cdot \cos x + \frac{2x}{x^2 + 3}$$

02

$$y' = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \cos(3x) - 3 \cdot e^{-x^2} \cdot \sin(3x)$$

03

$$y' = a^x \cdot \ln a$$

04

$$y' = 2e^{2x} \cdot \cos(e^{2x})$$

05

$$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot (\ln x^2 + 1) + e^{\sin x} \cdot \frac{2}{x}$$

CHAPTER 03 미분

06

$$y' = x^x (\ln x + 1)$$

07

$$y' = (\sin x)^x \{ \ln(\sin x) + x \cdot \cot x \}$$

08

$$y' = x^{\sin x} \left\{ (\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x} \right\}$$

09

$$y = \ln|x| : y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x : y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

10

$$y' = (\cos x)^x \{ \ln(\cos x) - x \cdot \tan x \}$$

11

$$y' = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

12

$$y' = \frac{(x^2 + 2)^4 (x^4 + 4)^4}{(3x^3 + 2x + 5)^7} \times \left\{ \frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{16x^3}{x^4 + 4} - \frac{63x^2 + 14}{3x^3 + 2x + 5} \right\}$$

13

$$y' = \frac{e^{x+y} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - e^{x+y}}$$

14

$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{y}{x}}$$

15

$$y' = \frac{2x^2 \cdot e^{x^2} + 1}{x \cdot \sec y \cdot \tan y}$$

16

$$x'(t) = k \cdot x(t)$$

17

$$x(t) = x_0 \cdot e^{kt}$$

18

증명 생략

19

$$y' = \frac{-1}{1 + \tan^2 x} \cdot \sec^2 x$$

CHAPTER 03 미분

20

$$y' = \frac{-\sin x}{1 + \cos^2 x}$$

21

$$y' = -1$$

22

$$y' = \frac{-\sin x}{1 - \cos^2 x}$$

23

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$$