4.1 연습문제

1.

풀이 180° 가 1라디안이므로

(a) $10^\circ = \dfrac{10}{180} = \dfrac{1}{18}$

(b) $110^\circ = \dfrac{110}{180} = \dfrac{11}{18}$

(c) $250^\circ = \dfrac{250}{180} = \dfrac{25}{18}$

(d) $320^\circ = \dfrac{320}{180} = \dfrac{16}{9}$

3.

풀이 $\sin\theta$와 $\cos\theta$는 서로 다른 부호이고, $\tan\theta$와 $\cos\theta$는 동일한 부호이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

5.

풀이 부채꼴의 넓이가 $S = \dfrac{1}{2} r\,l = \dfrac{1}{2}\cdot r \cdot 2\pi = 3\pi$이므로 $r = 3$이다. 그러므로 호의 길이는

$l = r\,\theta = 3\theta = 2\pi;\ \theta = \dfrac{2\pi}{3}$이다.

7.

풀이 (a) $\dfrac{25\pi}{6} = 4\pi + \dfrac{\pi}{6}$이므로 $\sin\dfrac{25\pi}{6} = \sin\left(4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

(b) $630^\circ = 360^\circ + 270^\circ$이므로 $\cos 630^\circ = \cos(360^\circ + 270^\circ) = \cos 270^\circ = 0$

(c) $-\dfrac{27\pi}{4} = -7\pi + \dfrac{\pi}{4}$이므로 $\cot\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right) = \cot\left(-7\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cot\dfrac{\pi}{4} = 1$

(d) $1140^\circ = 3\times 360^\circ + 60^\circ$이므로

$$\sec 1140^\circ = \sec(3\times 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

9.

풀이 $\cos\theta + \sin\theta < 0$이므로 $\sqrt{(\cos\theta + \sin\theta)^2} = -(\cos\theta + \sin\theta) = -\sin\theta - \cos\theta$

4.2 연습문제

1.

풀이 제3사분면에서 $\sin\theta < 0$이므로 $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$;

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 따라서 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$ 이다.

3. 다음 식을 간단히 하여라.

풀이 (a) $$\frac{1}{1+\sec\theta} - \frac{1}{1-\sec\theta} = \frac{(1-\sec\theta)-(1+\sec\theta)}{(1+\sec\theta)(1-\sec\theta)} = -\frac{2\sec\theta}{1-\sec^2\theta}$$

$$= (-2)\frac{\sec\theta}{-\tan^2\theta} = \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

이므로 $\frac{\sec\theta}{1+\sec\theta} - \frac{\sec\theta}{1-\sec\theta} = \sec\theta \cdot \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2}{\sin^2\theta} = 2\operatorname{cosec}^2\theta$이다.

(b) $$\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta} + \frac{1}{\sec\theta+\tan\theta} = \frac{(\sec\theta+\tan\theta)+(\sec\theta-\tan\theta)}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2\sec\theta}{\sec^2\theta-(\sec^2\theta-1)} = 2\sec\theta$$

이므로 $\frac{1}{\sec\theta}\left(\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta} + \frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}\right) = 2$이다.

(c) $$\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$= \cos\theta + \sin\theta$$

(d) $$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + (1-\sin\theta)\sec\theta = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{2(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)\cos\theta} = 2\sec\theta$$

5.

풀이 (a) $$\frac{\cos(\pi-\theta)}{-1+\sin(\pi-\theta)} - \frac{1-\sin\theta}{\cos(\pi+\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-1+\sin\theta} - \frac{1-\sin\theta}{-\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} + \frac{(1-\sin\theta)\cos\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta} = 2\sec\theta$$

(b) $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}-\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}-\dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}-\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=0$$

7.

풀이 (a) $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\beta\le\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$ 이다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{13}{14}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}+\frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{11}{14}=\frac{98\sqrt{3}}{196}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}-\frac{13}{14}\cdot\frac{11}{14}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}=-\sqrt{3}$$

(b) $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\beta\le\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $0\le\alpha+\beta\le\pi$ 이다.

따라서 $\alpha+\beta$는 제1, 2 사분면에 있는 각이며, 여기서 $\tan(\alpha+\beta)=-\sqrt{3}$ 이 되는 $\alpha+\beta$는 $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ 이다.

9.

풀이 (1) $\sin 75^\circ\cos 15^\circ=\dfrac{1}{2}[\sin(75^\circ+15^\circ)+\sin(75^\circ-15^\circ)]$

$$=\frac{1}{2}(\sin 90^\circ+\sin 60^\circ)=\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})$$

(2) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)$

$$= 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

11.

풀이 (a) $\sin 20^\circ = \sin(2 \cdot 10^\circ) = 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ = 2(0.1736)(0.9848) = 0.3419$

(b) $\cos 20^\circ = \cos(2 \cdot 10^\circ) = 2\cos^2 10^\circ - 1 = (0.9848)^2 - (0.1736)^2 = 0.9396$

(c) $\sin 40^\circ = \sin(2 \cdot 20^\circ) = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ = 2(0.3419)(0.9396) = 0.6425$

(d) $\sin 85^\circ = \sin(90^\circ - 5^\circ) = \cos 5^\circ = 0.9662$

(e) $\cos 100^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ = -0.1736$

(f) $\tan 175^\circ = \tan(180^\circ - 5^\circ) = -\tan 5^\circ = -0.0875$

4.3 연습문제

1.

풀이 $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$, $\tan(-x)=-\tan x$이므로 주어진 x에 대한 삼각비는 다음 표와 같다.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\sec x$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$
$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	-2
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$

(a) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{4\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$

$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$

(b) $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}+\sec s\frac{\pi}{3}=2+\sqrt{3}$

$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\frac{4\pi}{3}+\sec\frac{4\pi}{3}=-1+(-\sqrt{2})=-1-\sqrt{2}$

$g\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\sec\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+(-2)=-2+\sqrt{3}$

$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1+\sqrt{2}$

3.

풀이 (a) $a=1$, $b=-\sqrt{2}$이므로 $\tan\alpha=\frac{-\sqrt{2}}{1}$을 만족하는 α에 대하여

$y=\sin x-\sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\sin(x+\alpha)$이므로

최댓값은 $\sqrt{3}$이고 최솟값은 $-\sqrt{3}$이다.

(b) $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b=1$이므로 $\tan\alpha=\frac{1}{1/\sqrt{3}}=\sqrt{3}$을 만족하는 $\alpha=\frac{\pi}{3}$에 대하여

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x+\cos x=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1^2}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이므로 최댓값은 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 최솟값은 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

5.

풀이 직선 $y=\sqrt{3}x-1$과 x축이 이루는 사이각을 α라 하면 $\tan\alpha=\sqrt{3}$이고, 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+2$과 x축이 이루는 사이각을 β라 하면 $\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 따라서 두 직선이 이루는 예각 θ에 대하여

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이다. 그리고 θ가 예각이므로 θ는 제1사분면의 각이고, 따라서 $\theta=\frac{\pi}{6}$이다.

7.

풀이 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{3}$이므로 $b=\frac{3}{2}$이고, 최댓값은 $a+c=4$ 최솟값은 $-a+c=-2$이므로 $a=3$, $c=1$이다.

4.4 연습문제

1.

풀이 (a) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\alpha$라 하면, $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$

(b) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\alpha$라 하면, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $0\le\alpha\le\pi$이므로 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

(c) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})=\alpha$라 하면, $\tan\alpha=-\sqrt{3}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$

(d) $\sin^{-1}\dfrac{\pi}{3}=\alpha$라 하면, $\sin\alpha=\dfrac{\pi}{3}>1$이므로 존재하지 않는다.

3.

풀이 $1+\cos x=2\sin^2 x$; $1+\cos x=2-2\cos^2 x$; $2\cos^2 x+\cos x-1=0$;

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$; $\cos x=\dfrac{1}{2}$, $\cos x=-1$;

$x=\cos^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$, $x=\cos^{-1}(-1)=\pi$

제4장 연습문제

4.1

풀이 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면, $2r+l=12$이므로 $l=12-2r$이고
따라서 넓이는

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(12-2r)=-r^2+6r=-(r-3)^2+9$$

이다. 그러므로 최대 넓이는 9이고, 이때 반지름의 길이는 3이다. 그러면 호의 길이가 $l=6$이므로 중심각을 θ라 하면, $l=r\theta$이므로 $\theta=\frac{l}{r}=\frac{6}{3}=2(\mathrm{rad})$이다.

4.3

풀이 동경 OP의 길이는 $r=\sqrt{(-5)^2+(-2\sqrt{6})^2}=\sqrt{49}=7$이고 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\cos\theta=-\frac{5}{7}$, $\tan\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$이다.

4.5

풀이 $x=\overline{BC}$라 하면 $\overline{AC}=x+100$이므로

$$\tan 30^\circ=\frac{h}{x+100}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \tan 45^\circ=\frac{h}{x}=1$$

이다. 그러므로 $\sqrt{3}h=100+x;\ h=x$이고 따라서

$$\sqrt{3}h=100+h;\ (\sqrt{3}-1)h=100;\ h=\frac{100}{\sqrt{3}-1}=50(1+\sqrt{3})$$

이다.

4.7

풀이 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta=\frac{2}{3}$이므로 $x=-\sqrt{3^2-2^2}=-\sqrt{5}$이므로

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3},\ \tan\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sec\theta=-\frac{3}{\sqrt{5}}$$

이고, 따라서 $\sec\theta+\tan\theta=-\frac{3}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{5}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$이다.

4.9

풀이 점 P가 제2사분면 위의 점이므로 동경 OP가 이루는 각 θ는 제2사분면의 각이고,
따라서 $r=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$이다. 그러므로

구하고자 하는 값은 $5(\sin\theta-\cos\theta)+4\tan\theta=5\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+4\left(-\frac{3}{4}\right)=4$이다.

4.11

풀이 (a) 제3사분면의 각 θ에 대하여 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로

$$\sqrt{\sin^2\theta}-\sqrt{\cos^2\theta}=-\sin\theta-(-\cos\theta)=-\sin\theta+\cos\theta$$

(b) $\cos\theta+\sin\theta<0$이므로

$$\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\sqrt[3]{(\sin\theta-\cos\theta)^3}=-(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-2\cos\theta$$

4.13

풀이 $(\sec\theta-\cos\theta)^2+(\mathrm{cosec}\,\theta-\sin\theta)^2-(\cot\theta-\tan\theta)^2$

$$=(\sec^2\theta+\cos^2\theta-2)+(\mathrm{cosec}^2\theta+\sin^2\theta-2)-(\cot^2\theta+\tan^2\theta-2)$$

$$=(\sec^2\theta-\tan^2\theta)+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(\mathrm{cosec}^2\theta-\cot^2\theta)-2$$

$$=1+1+1-2=1$$

4.15

풀이 $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right)=\cos\left(-5\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

4.17

풀이 $\sin\frac{14\pi}{3}=\sin\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.19

풀이 $\cos\theta+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi+\theta)$

$$=\cos\theta+(-\cos\theta)+\cos\theta-\cos\theta=0$$

4.21

풀이 $\sin(\pi+\theta)+\sin\theta+\cos(\pi-\theta)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

$$=-\sin\theta+\sin\theta-\cos\theta-(-\cos\theta)=0$$

4.23

풀이 $$\cos^2 37.5^\circ = \frac{1+\cos 75^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

$$\sin^2 37.5^\circ = \frac{1-\cos 75^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

이고, 37.5°는 제1사분면 안의 각이므로 $\cos 37.5^\circ > 0$, $\sin 37.5^\circ > 0$이다. 그러므로

$$\cos 37.5^\circ = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}, \quad \sin 37.5^\circ = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$$

$$\tan 37.5^\circ = \frac{\sin 37.5^\circ}{\cos 37.5^\circ} = \frac{\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}}{\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}}$$

이다.

4.25

풀이 (a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5}$이므로 양변을 제곱하면

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{16}{25}$$

이므로 $2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{9}{25}$이고, 따라서 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{9}{25}$이다.

(b) $$\begin{aligned}\sin 3\alpha - \cos 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) \\ &= 3(\sin\alpha+\cos\alpha) - 4(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha) \\ &= 3(\sin\alpha+\cos\alpha) - 4\{(\sin\alpha+\cos\alpha)^3 - 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)\} \\ &= 3\cdot\frac{4}{5} - 4\cdot\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{9}{2\cdot 25}\right)\cdot\frac{4}{5}\right\} \\ &= -\frac{172}{125}\end{aligned}$$

4.27

풀이 (a) $\alpha=36^\circ$ 이므로 $3\alpha=108^\circ$, $2\alpha=72^\circ$ 이고 따라서 $3\alpha+2\alpha=180^\circ$ 이다. 따라서

$$\sin 3\alpha=\sin(180^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha$$

(b) $\sin 3\alpha=\sin 2\alpha$이므로 $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$이고, $\sin\alpha=\sin 36^\circ\neq 0$이므로 양변을 $\sin\alpha$로 나누면 다음을 얻는다.

$3-4\sin^2\alpha=2\cos\alpha;\quad 3-4(1-\cos^2\alpha)=2\cos\alpha;\ 4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$

(c) $\cos\alpha$에 관한 이차방정식 (2)에서 $x=\cos\alpha$라 하면 $4x^2-2x-1=0$이므로 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-1)}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

이고, $\cos 36^\circ=\cos\alpha>0$이므로 $x=\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$이다.

4.29

풀이 $a=-2$, $b=3$이므로 $\tan\alpha=\dfrac{3}{-2}$을 만족하는 α에 대하여

$y=-2\sin x+3\cos x=\sqrt{(-2)^2+3^2}\sin(x+\alpha)=\sqrt{13}\sin(x+\alpha)$이므로 최댓값은

$\sqrt{13}$ 이고 최솟값은 $-\sqrt{13}$ 이다.

4.31

풀이 (a) $a=\tan\dfrac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$ 이고, $b=-\dfrac{1}{2}$이므로 구하고자 하는 직선의 방정식은

$y=-\sqrt{3}x-\dfrac{1}{2}$이다.

(b) $a=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$이므로 직선의 방정식은 $y=-x+b$이고, 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=-1+b$; $b=2$이다. 그러므로 구하고자 하는 직선의 방정식은 $y=-x+2$이다.

4.33

풀이 $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\dfrac{3}{10}\right)\right]=-\dfrac{3}{10}$

4.35

풀이 $\tan^{-1}\left[\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=-\dfrac{\pi}{6}$

4.37

풀이 $\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)=\alpha$, $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\beta$라 하면, $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$이므로

$$\sin\alpha=-\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\beta=\frac{4}{5},\ \cos\beta=\frac{3}{5}$$

이고 따라서 구하고자 하는 값은 다음과 같다.

$$\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)-\sin^{-1}\frac{4}{5}\right]=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\frac{3}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)\frac{4}{5}=0$$

4.39

풀이 $\sin^{-1}\frac{1}{2}=\alpha$, $\cos^{-1}0=\beta$라 하면, $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=0$이므로 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin\beta=1$이다. 그러므로 구하고자 하는 값은 다음과 같다.

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}0\right)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.41

풀이 $\tan^{-1}2=\alpha$, $\tan^{-1}(-3)=\beta$라 하면, $\tan^{-1}\alpha=2$, $\tan\beta=-3$; $0<\alpha+\beta<\pi$이므로

$$\tan(\tan^{-1}2-\tan^{-1}(-3))=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-(-3)}{1+2(-3)}=-1$$

이다. 따라서 $\tan^{-1}2-\tan^{-1}-3)=\frac{3\pi}{4}$이다.

4.43

풀이 $\tan^{-1}x=\alpha$, $\cot^{-1}x=\beta$라 하면, $\tan\alpha=x$, $\cot\beta=x$이므로 $\tan\beta=\frac{1}{x}$이다. 따라서

$$\tan(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+\frac{1}{x}}{1-x\cdot\frac{1}{x}}=\infty$$

이고, $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$이다.