5.1 연습문제

1.

풀이 (a) $\lim_{x \to -3-} f(x) = -3$ (b) $\lim_{x \to -3+} f(x) = -2$

(c) $x \to -3$일 때, 좌극한과 우극한이 서로 다르므로 $\lim_{x \to -3} f(x)$는 존재하지 않는다.

(d) $\lim_{x \to 0-} f(x) = 3$ (e) $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$

(f) $x \to 0$일 때, 좌극한과 우극한이 서로 다르므로 $\lim_{x \to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

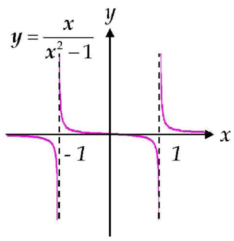
3.

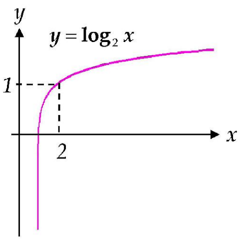
풀이 (a) $0 < x < 1$에서 $x^2 - 1 < 0$이므로 $f(x) < 0$이고 $x > 1$에서 $x^2 - 1 > 0$이므로 $f(x) > 0$이다. 또한 $0 < x < 1$이고 $x \to 1-$이면, 분자는 상수 1로 수렴하지만 분모는 $x^2 - 1 \to 0$이므로 $f(x) \to -\infty$이고, 따라서 좌극한은 음의 무한대이다. $x > 1$이고 $x \to 1+$이면, 분자는 상수 1로 수렴하지만 분모는 $x^2 - 1 \to 0$이므로 $f(x) \to \infty$이고, 따라서 우극한은 양의 무한대이다. 따라서 $x \to 1$일 때, 함수 $\dfrac{x}{x^2 - 1}$의 극한은 존재하지 않는다.

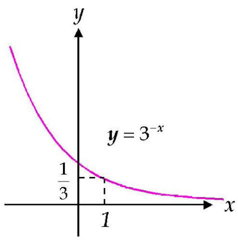
(b) $y = \log_2 x$에 대하여 $x \to 2-$이면 $\log_2 x \to 1$이고, $x \to 2+$이면 $\log_2 x \to 1$이므로 $\lim_{x \to 2} \log_2 x = 1$이다.

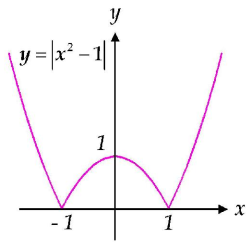
(c) $y = 3^{-x}$에 대하여 $x \to 1-$이면 $3^{-x} \to \dfrac{1}{3}$이고, $x \to 1+$이면 $3^{-x} \to \dfrac{1}{3}$이므로 $\lim_{x \to 2} 3^{-x} = \dfrac{1}{3}$이다.

(d) $x \to 1-$이면, $x^2 - 1 \to 0$이고 $x \to 1+$이면, $x^2 - 1 \to 0$이므로 $\lim_{x \to 2} |x^2 - 1| = 0$이다.









5.

풀이 $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$이므로 함수 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$는 $y = \dfrac{2}{x}$를 x축 방향으로 1만큼 y축 방향으로 1만큼 평행이동한 다음과 같은 그래프를 갖는다.

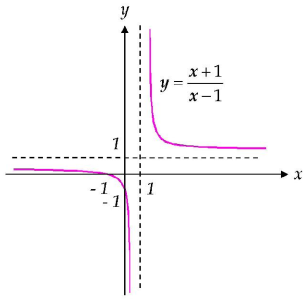
(a) $x \to \infty$이면 $\dfrac{2}{x} \to 0$이고 따라서 $\dfrac{x+1}{x-1} \to 1$이므로 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$이다.

(b) $x \to -\infty$이면 $\dfrac{1}{x} \to 0$이고 따라서 $\dfrac{x+1}{x-1} \to 1$이므로 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$이다.

(c) $x \to 1-$이면 $x-1<0$, $\dfrac{1}{x-1} \to 0$이고 $\dfrac{x+1}{x-1} \to -\infty$이므로 $\displaystyle\lim_{x \to 1-} \dfrac{x+1}{x} = -\infty$이다.

(d) $x \to 1+$이면 $x-1>0$, $\dfrac{1}{x-1} \to 0$이고 $\dfrac{x+1}{x-1} \to \infty$이므로 $\displaystyle\lim_{x \to 1+} \dfrac{x+1}{x-1} = \infty$이다.

그러므로 수평점근선 $y=1$과 수직점근선 $x=1$을 갖는다.



5.2 연습문제

1.

풀이 (a) $\lim_{x\to 01}[3f(x)+g(x)]=3\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}g(x)=3\cdot 1+(-2)=1$

(b) $\lim_{x\to 0}[2f(x)-3g(x)]=\lim_{x\to 0}[2f(x)]+\lim_{x\to 0}[-3g(x)]=2\lim_{x\to 0}f(x)+(-3)\lim_{x\to 0}g(x)$

$$=2\cdot 1+(-3)\cdot(-2)=8$$

(c) $\lim_{x\to 0}f(x)\cdot g(x)=\left(\lim_{x\to 0}f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}g(x)\right)=1\cdot(-2)=-2$

(d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to 0}f(x)}{\lim_{x\to 0}g(x)}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$

3.

풀이 (a) $f(x)=x^4-x^2+2$라 하면, $f(x)$는 4차 다항함수이므로 $\lim_{x\to 1}(x^4-x^2+2)=f(1)=1-1+2=2$이다.

(b) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x-1|}=\dfrac{x(x-1)}{|x-1|}$이라 하면, $0<x<1$이면 $f(x)=-x$이고 $x>1$이면 $f(x)=x$이다. 따라서 $\lim_{x\to 1-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$이므로 극한이 존재하지 않는다.

(c) $f(x)=|x|-1$이라 하면, $-1<x<0$이면 $f(x)=-x-1$이고 $x>1$이면 $f(x)=x-1$이다. 따라서 $\lim_{x\to 0-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0+}f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=-1$이다.

(d) $f(x)=\sqrt{(x^2-1)^2}$이라 하면, $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1}\sqrt{(x^2-1)^2}=0$이다.

5.

풀이 (a) 모든 실수 x에 대하여 $|\sin x|\le 1$이므로 $\left|\dfrac{1}{x}\sin x\right|=\dfrac{1}{|x|}|\sin x|\le\dfrac{1}{|x|}$, 즉

$-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{1}{x}\sin x\le\dfrac{1}{|x|}$이다. 또한 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$이다.

(b) 모든 실수 x에 대하여 $|\cos x|\le 1$이므로 $\left|\dfrac{1}{x}\cos x\right|=\dfrac{1}{|x|}|\cos x|\le\dfrac{1}{|x|}$, 즉

$-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{1}{x}\cos x\le\dfrac{1}{|x|}$이다. 또한 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cos x=0$이다.

7.

풀이 두 함수의 극한이 각각 존재하는 경우에 $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$가 성립한다. 이 풀이과정에서 $\lim_{x \to 0} x = 0$이지만 $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$이 존재하지 않으므로

$$\lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} \neq \left(\lim_{x \to 0} x\right)\left(\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}\right)$$

이다.

5.3 연습문제

1.

풀이 (a) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - 1}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2}$

$$= \frac{3}{2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - 1}{3x}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x}\right) = \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{x + \tan x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x + \tan x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{\tan x}{x}}{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{1 + \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}}{2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{1+1}{2 \cdot 1} = 1$

(d) $\lim_{x \to 0} x \cot 2x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \cos 2x\right) = \frac{1}{2}$

3.

풀이 $x \neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $\left|\cos \frac{1}{x}\right| \leq 1$이므로

$$\left|\sin x \, \cos \frac{1}{x}\right| \leq |\sin x|; \ -|\sin x| \leq \sin x \, \cos \frac{1}{x} \leq |\sin x|$$

이다. 한편 $\lim_{x \to 0} |\sin x| = 0$이므로 $\lim_{x \to 0} \sin x \cos \frac{1}{x} = 0$이다.

5.4 연습문제

1.

풀이 $\ln(x-1)-\ln x=\ln\dfrac{x-1}{x}=\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$이고, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$이므로 구하고자 하는 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to\infty}\{\ln(x-1)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=\ln 1=0$$

3.

풀이 (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{1}{x}+e\right)=\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+e\right)\right]=\ln e=1$

(b) $x\to 2+$이므로 $t=x-2$라 하면, $t\to 0+$이고 따라서 구하고자 하는 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 2+}\log_3(x-2)=\lim_{t\to 0+}\log_3 t=-\infty$$

(c) $$\lim_{x\to 1+}\left[\ln(x^2-1)-\ln(x-1)\right]=\lim_{x\to 1+}\ln\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\ln\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\ln(x+1)=\ln\left[\lim_{x\to 1+}(x+1)\right]=\ln 2$$

(d) $$\lim_{x\to\infty}\left[\log_2(x^2-1)-2\log_2 x\right]=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x^2-1}{x^2}=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

$$=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-(1/x^2)}{1}\right)=\log_2 1=0$$

5.

풀이 (a) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+3x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^3=\ln e^3=3$$

(b) $$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)=\ln e=1$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{2x}=\lim_{x\to 0-}\ln(1-3x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0-}\ln\left((1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0-}(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\ln e^{-3/2}=-\frac{3}{2}$$

(d) $\lim_{x \to 0} \ln \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \ln \left[\left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-\frac{3}{x}}\right]^{-\frac{2}{3}} = \ln \left[\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-\frac{3}{x}}\right]^{-\frac{2}{3}}$

$= \ln \left(e^{-2/3}\right) = -\frac{2}{3}$

5.5 연습문제

1.

풀이 (a) $f(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(b) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$, $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x-1}{x-1}=1$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 좌극한과 우극한이 서로 다르고, 따라서 $x=1$에서 불연속이다.

(c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$이고 $f(2)=2$이므로 $f(2)\neq\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 이고, 따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\ln|x|=\infty$ 이므로 $x=0$에서 불연속이다.

3.

풀이 (a) $f(x)=3x^2-2x-2$은 2차의 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

(b) $x=2$이면, 함수 $f(x)$는 정의되지 않는다. 그러므로 함수 $f(x)$는 $x\neq 2$인 모든 실수에서 연속이다.

(c) $x-1$, $\sqrt{x^2+1}-3$은 모든 실수에서 연속이므로 분모 $\sqrt{x^2+1}-3$이 0이 아닌 모든 실수에서 연속이다. $\sqrt{x^2+1}-3=0$; $x^2+1=9$; $x=\pm 2\sqrt{2}$ 이므로 $x\neq\pm 2\sqrt{2}$ 인 모든 실수에서 주어진 함수는 연속이다.

5.

풀이 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\sqrt{x}$ 이므로

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2-1)=3$$

이고, $g(x)$는 $x=3$에서 연속이므로 구하고자 하는 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 2}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2-1)}=\sqrt{3}$$

7.

풀이 $f(x)=x^2+\ln x$라 하면, $f(x)$는 $x>0$에서 연속이므로 폐구간 $[e^{-1},1]$에서 연속이다. 또한 $f(e^{-1})=\dfrac{1}{e^2}-1<0$, $f(1)=1>0$이므로 중간값 정리에 의하여 개구간 $(e^{-1},1)$에서 $f(c)=0$을 만족하는 실수 c가 적어도 하나 존재한다. 즉, 적어도 하나의 $e^{-1}<c<1$에 대하여 $f(c)=0$이 성립한다.

제5장 연습문제

5.1

풀이 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{\lim\limits_{x\to 0}\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$

5.3

풀이 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x(x^2+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1}=1$

5.5

풀이 $x\to 2$이면 $x^2>4$이고 $|x^2-4|=x^2-4=(x-2)(x+2)$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-4|}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

5.7

풀이 $x\to 0+$이면 $x>0$이고 $|x|=x$이므로 $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0+}0=0$이다.

5.9

풀이 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{3x}{\tan 3x}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

5.11

풀이 $t=x-2$라 하면, $x\to 2$이면 $t\to 0$이고

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(3x-6)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin 3(x-2)}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\cdot 3=3$$

5.13

풀이 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{4x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{1}{2}=0\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=0$

5.15

풀이 $t=x-1$라 하면, $x\to 1$이면 $t\to 0$이고 $x=t+1$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi(t+1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}=(-\pi)\lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}=-\pi$$

5.17

풀이 x° 를 라디안으로 바꾸면, $x^\circ = \dfrac{\pi x}{180}$ 이므로

$$\lim_{x\to 1} x^\circ \sin \pi x = \lim_{x\to 1} \frac{\pi x}{180} \sin \pi x = \frac{\pi}{180} \cdot \sin \pi = 0$$

5.19

풀이 $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{2^x + 4^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{4}\right)^x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1} = 1$

5.21

풀이 $t = 3 - x$라 하면, $x \to 3+$이면 $t \to 0-$이고 $\dfrac{3}{t} \to -\infty$이므로

$\displaystyle \lim_{x\to 3+} e^{\frac{3}{3-x}} = \lim_{t\to 0-} e^{\frac{3}{t}} = 0$이다.

5.23

풀이 $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$이므로 극한이 존재하기 위하여 $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (ax+b) = 0$이어야 한다. 따라서

$\dfrac{\pi a}{2} + b = 0$; $b = -\dfrac{\pi a}{2}$이므로 $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{ax+b}{\cos x} = a \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-(\pi/2)}{\cos x}$이다. 이제 $t = x - \dfrac{\pi}{2}$라

하면 $x \to \pi/2$일 때, $t \to 0$이고

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-(\pi/2)}{\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\cos(t+(\pi/2))} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{-\sin t} = -1;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{ax+b}{\cos x} = -a$$

이다. 따라서 $a = -2$, $b = -\dfrac{\pi a}{2} = \pi$이다.

5.25

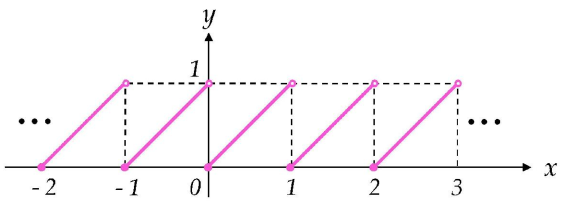
풀이 (a) $\displaystyle \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$

(c) 좌극한과 우극한이 같지 않으므로 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$는 존재하지 않는다.

(d) $x \neq 0$이면, $|\operatorname{sgn}(x)| = 1$이므로 $\displaystyle \lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$이다.

5.27

풀이 (a)



(b) 모든 정수 n에 대하여 $\lim_{x \to n-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to n+} f(x) = 0$이다.

(c) $n < a < n+1$이면, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(x - [x]) = a - [a] = f(a)$이므로 정수가 아닌 모든 실수에서 연속이다.

5.29

풀이 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12$이지만 $f(2)$가 존재하지 않으므로 $x = 2$에서 불연속이다.

5.31

풀이 $f(2) = 2$이고

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2,\ \lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+}(4 - x) = 2$$

이므로 $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$이고 따라서 $x = 2$에서 연속이다.

5.33

풀이 $x < 5$와 $x > 5$에서 $f(x)$는 다항함수이므로 연속이다. 따라서 $x = 5$에서 연속이 되는 b, c를 구하면 된다.

$$\lim_{x \to 5-} f(x) = \lim_{x \to 5-}(bx + 1) = 5b + 1 = f(5) = 6;\ b = 1$$

$$\lim_{x \to 5+} f(x) = \lim_{x \to 5+}(x^2 + 2cx + 1) = 25 + 10c + 1 = f(5) = 6;\ c = -2$$

이다.

5.35

풀이 $f(x) = (x^2 - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x$라 하면, 다항함수와 $\cos x$ 그리고 $\sin x$가 모든 실수에서 연속이므로 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이고 따라서 폐구간 $[0, \pi/2]$에서 연속이다. 한편 $f(0) = -1 < 0 < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$이므로 중간값 정리에 의하여 $f(c) = 0$을 만족하는 c가

$(0, \pi/2)$ 안에 적어도 하나 존재한다. 즉, $(c^2-1)\cos c+\sqrt{2}\sin c=0$을 만족하는 c가 $(0, \pi/2)$ 안에 적어도 하나 존재한다. 그러므로 $(0, \pi/2)$ 안에 적어도 하나의 실근을 갖는다.