2.1 연습문제

1.

풀이 주어진 점을 좌표평면에 표시하면 각각 그림 2.7과 같다. 또한 원점으로부터 각 점까지의 거리를 구하면 다음과 같다.

(a) $\overline{OA} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

(b) $\overline{OB} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

(c) $\overline{OC} = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$

(d) $\overline{OD} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

3.

풀이 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $B'(-4,-4)$이고, $\overline{OA} = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$ 이므로 점 B까지의 거리는 $\overline{OB} = 2\sqrt{2}$ 이고 점 B의 좌표는 $\frac{1}{2}(-4,-4) = (-2,-2)$이다.

2.2 연습문제

1.

풀이 (a) 집합 X 안의 원소 5가 대응하는 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(b) 함수이고 치역은 $\mathrm{ran}(f) = \{1, 2, 4\}$

(c) 함수이고 치역은 $\mathrm{ran}(f) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(d) 함수이고 치역은 $\mathrm{ran}(f) = \{1\}$

3.

풀이 $f(x) = 2x + k$가 X에서 Y로의 함수이므로 $f(X) \subseteq Y$이고, 따라서 $f(-1) \in Y$, $f(2) \in Y$이어야 한다. 그러므로 $0 \leq f(-1) = -2 + k \leq 8$, $0 \leq f(2) = 4 + k \leq 8$이고, 따라서 $2 \leq k \leq 10$, $-4 \leq k \leq 4$이다. 즉, $2 \leq k \leq 4$이다.

2.3 연습문제

1.

풀이 $f(-2)=-2a+1=g(-2)=4+b$이고, $f(1)=a+1=g(1)=1+b$이므로 $-2a+1=4+b$, $a+1=1+b$로부터 $a=b=-1$이다.

3.

풀이 (a) $2f(x)+g(x)=2\sqrt{x}+x^2$, $\mathrm{dom}(2f+g)=\{x\in R: x\geq 0\}$

(b) $f(2x)-g(x)=\sqrt{2x}-x^2$, $\mathrm{dom}(f-g)=\{x\in R: x\geq 0\}$

(c) $f(x)\cdot g(x)=x^2\sqrt{x}$, $\mathrm{dom}(f\cdot g)=\{x\in R: x\geq 0\}$

(d) $k(x)=\dfrac{f(x)-2g(x)}{f(x)g(x)}=\dfrac{\sqrt{x}-2x^2}{x^2\sqrt{x}}$, $\mathrm{dom}(k)=\{x\in R: x>0\}$

(e) $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2}=|x|$, $\mathrm{dom}(f\circ g)=R=(-\infty, \infty)$

(f) $(g\circ f)(x)=(\sqrt{x})^2=x$, $\mathrm{dom}(g\circ f)=\{x\in R: x\geq 0\}$

5.

풀이 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=ag(x)+6=a(-x-a)+6=-ax-a^2+6$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=-f(x)-a=-(ax+6)-a=-ax-6-a$

이므로 $-ax-a^2+6=-ax-6-a$이고, 따라서

$$-a^2+6=-6-a;\ a^2-a-12=0;\ (a-4)(a+3)=0,\ a=4,\ a=-3$$

이다.

7.

풀이 구하고자 하는 일차함수를 $h(x)=ax+b$라 하면,

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=2(-x)+1=-2x+1$$

이고, 따라서

$$(h\circ g\circ f)(x)=h[(g\circ f)(x)]=a(-2x+1)+b=-2ax+a+b=f(x)=-x$$

이므로 $2a=1$, $a+b=1$; $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이다.

2.4 연습문제

1.

풀이 (a) 기울기 -1인 일차함수는 $y=-x+b$이고, 점 $(2,3)$을 지나므로 $3=-2+b$; $b=5$이다. 따라서 구하고자 하는 일차함수는 $y=-x+5$이다.

(b) x축 절편 -1와 y축 절편 -2를 지나는 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{-2}=1$이므로 $y=-2x-2$이다.

3.

풀이 (a) $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이고, $f(0)=0$, $f(1)=-1$, $f(4)=8$이므로 최댓값은 8이고 최솟값은 -1이다.

(b) $f(x)=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$이므로 $f(-1)=8$, $f(2)=-7$이므로 최댓값은 8이고 최솟값은 -7이다.

(c) $t=x^2-2x+1=(x-1)^2+1$이라 하면 $1\le x\le 3$에서 증가하고 $1\le t\le 5$이다. 따라서 주어진 함수는 $f(t)=t^2-2t+4=(t-1)^2+3$, $1\le t\le 5$와 같이 생각할 수 있다. 그러므로 최댓값은 $f(5)=19$, 최솟값은 $f(1)=3$이다.

5.

풀이 판별식 $D/4=(-1)^2-1\cdot k\ge 0$이므로 $k\le 1$이다.

7.

풀이 $x^2+1=kx$; $x^2-kx+1=0$이므로 판별식 $D=(-k)^2-4=(k-2)(k+2)<0$이므로 $-2<k<2$이다.

제2장 연습문제

2.1

풀이 정의역 안의 모든 점에 대한 함숫값이 공변역 Y 안에 들어가야 하고, $f(x)$가 증가함수이므로 $0 \le f(-1) = -1-k \le 6$, $0 \le f(4) = 4-k \le 6$, $f(-1) = -1-k < f(4) = 4-k$이다. 따라서 「$-7 \le k \le -1$, $-2 \le k \le 4$, 모든 실수 k」을 모두 만족하는 k의 범위는 $-2 \le k \le -1$이다.

2.3

풀이 $\dfrac{x+1}{x-1} = 2$를 만족하는 x를 먼저 구하면, $x+1 = 2(x-1)$, $x = 3$이므로

$f(2) = f\left(\dfrac{3+1}{3-1}\right) = 3^2 - 3 + 1 = 7$이다.

2.5

풀이 $(f \circ f)(x) = f(x) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2$

$[f \circ (f \circ f)](x) = f(x+2) + 1 = x + 3$

이므로 $(\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n})(x) = x + n$($n$은 자연수)이다.

2.7

풀이 $y = x - 4$의 역함수는 $x = y + 4$이므로 $y = f^{-1}(x) = x + 4$이고, $y = 2 - 3x$이므로 역함수는 $x = \dfrac{1}{3}(2-y)$이고 따라서 역함수는 $y = g^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}(2-x)$이다.

(a) $f^{-1}(3) = 3 + 4 = 7$

(b) $(f^{-1})^{-1}(3) = \mathrm{I}(3) = 3$

(c) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = g^{-1}(x) + 4 = \dfrac{1}{3}(2-x) + 4 = \dfrac{1}{3}(14-x)$이므로

$(f^{-1} \circ g^{-1})(3) = \dfrac{11}{3}$

(d) $(g \circ f)(x) = 2 - 3f(x) = 2 - 3(x-4) = 14 - 3x$이므로 역함수는 $y = 14 - 3x$로부터 $x = \dfrac{1}{3}(14-y)$이고, 따라서 $(g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}(14-y)$이다. 그러므로

$(g \circ f)^{-1}(3) = \dfrac{11}{3}$ 이다.

2.9

풀이 $(g \circ f)(x) = f(x) + a = x^2 - 2x - 3 + a$이므로 판별식 $D/4 \leq 0$이어야 한다. 그러므로 $D/4 = 1 - (-3 + a) = 4 - a \leq 0$이고, $a \geq 4$이다.

2.11

풀이 $f(x) = x^2 - 2tx + t^2 + 4t = (x-t)^2 + 4t$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(t, 4t)$이다. 따라서 $x = t,\ y = 4t$라 하면, 꼭짓점이 그리는 점의 자취 $y = 4x$이다.

2.13

풀이 $f(3-x) = f(3+x)$이므로 이차함수 $f(x)$는 $x = 3$을 중심으로 좌우대칭이므로 직선 $x = 3$ 위에서 꼭짓점을 갖는다. 또한 $f(3) = 1$이므로 이 함수는

$$f(x) = x^2 + px + q = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$$

이다. 그러므로 $p = -6,\ q = 10$이고, $f(2) = 2$이다.

2.15

풀이 $f(x) = x^2 - ax + 4$라 하면, $f(1) = -a + 5 < 0$이므로 $a > 5$이다.

2.17

풀이 (a) 전사함수

(b) 전단사함수

(c) 단사함수