## 3.1 연습문제

**1.**

풀이 (a) $2^{-1/4} \cdot 4^{3/4} = 2^{-\frac{1}{4}} \cdot (2^2)^{\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{1}{4}} \cdot 2^{2 \cdot \frac{3}{4}} = 2^{-\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{5}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$

(b) $2^{1/5} \cdot 4^{-1/5} \cdot 8^{3/5} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot (2^2)^{-\frac{1}{5}} \cdot (2^3)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{-\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{9}{5}} = 2^{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}+\frac{9}{5}} = 2^{\frac{8}{5}} = 2\sqrt[5]{2^3}$

(c) $\left(3^{1/\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = \left(3^{1/\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} \cdot \left(2^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = 3 \cdot 2^5 = 96$

(d) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{2^3}}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{2^2 \sqrt[4]{\sqrt{2}}}} = \left(2^{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}\right) \cdot \left(2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} \cdot 2^{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}\right)$

$= 2^{\frac{3}{16}} \cdot 2^{\frac{1}{64}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{29}{64}}$

**3.**

풀이 $\sqrt[5]{2^2} = \sqrt{16^k}$; $2^{\frac{2}{5}} = 16^{\frac{k}{2}} = (2^4)^{\frac{k}{2}} = 2^{2k}$; $2k = \frac{2}{5}$; $k = \frac{1}{5}$

**5.**

풀이 (a) $\frac{64^x}{4} = 4^{x+3}$; $4^{3x} = 4 \cdot 4^{x+3} = 4^{x+4}$; $3x = x+4$; $x = 2$

(b) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{3x} = 9^{2-x}$; $\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^{3x} = 3^{2(2-x)}$; $3^{-\frac{3x}{4}} = 3^{2(2-x)}$; $-\frac{3x}{4} = 4-2x$; $x = \frac{16}{5}$

(c) $4^x - 2^x - 6 = (2^x)^2 - 2^x - 6 = 0$이므로 $X = 2^x$이라 하면, $X > 0$이고 $X^2 - X - 6 = (X-3)(X+2) = 0$이므로 $X = 2^x = 3$, $x = \log_2 3$이다.

(d) $5^{2x} = 2^{4-2x}$; $\log_{10} 5^{2x} = \log_{10} 2^{4-2x}$; $2x\log_{10} 5 = (4-2x)\log_{10} 2$;

$2x\log_{10} 5 = 4\log_{10} 2 - 2x\log_{10} 2$; $2x(\log_{10} 5 + \log_{10} 2) = 4\log_{10} 2$;

$2x\log_{10} 10 = 4\log_{10} 2$;

$2x = 4\log_{10} 2$; $x = 2\log_{10} 2$

**7.**

풀이 (a) $\ln(3-4x) = -2$; $3-4x = e^{-2}$; $x = \frac{1}{4}(3-e^{-2})$

(b) $\ln(\ln x) = 1$; $\ln x = e$; $x = e^e$

(c) $\ln(3x+1) = 2 - \ln x$; $\ln(3x+1) = \ln e^2 - \ln x = \ln \frac{e^2}{x}$; $3x+1 = \frac{e^2}{x}$;

$3x^2 + x - e^2 = 0$;

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12e^2}}{6}$이고, 진수 조건에 의하여 $x > 0$이므로 $x = \frac{-1+\sqrt{1+12e^2}}{6}$

이다.

(d) $\ln(x^2-1)=\ln(x+5)$; $x^2-1=x+5$; $x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0$; $x=3$, $x=-2$이다. 한편 진수 조건에 의하여 $x^2-1>0$, $x+5>0$ 즉, $-5<x<-1$, $x>1$을 만족해야 한다. 따라서 구하고자 하는 방정식의 근은 $x=3$, $x=-2$이다.

**9.**

풀이 한 근을 $\alpha=2-i$라 하면, 다른 한 근은 $\beta=2+i$이므로 $\alpha+\beta=-a=4$, $\alpha\beta=b=5$이고, $(\sqrt[b]{4})^a=\left((2^2)^{\frac{1}{5}}\right)^{-4}=2^{-\frac{8}{5}}=\dfrac{1}{2^{\frac{8}{5}}}=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{2^3}}$이다.

## 3.2 연습문제

**1.**

풀이 $y-2=5^{-(x-1)}$; $y=2+5^{-x+1}$

**3.**

풀이 $y=1+3^{x-p}=q+3^{x+1}$이므로 $p=-1$, $q=1$이다.

**5.**

풀이 (a) $y=a^{x-2}+2$이 점 $(\alpha, \beta)$를 지나므로 $\beta=a^{\alpha-2}+2$; $a^{\alpha-2}+2-\beta=0$이고 $a$에 관계없이 등식이 성립하기 위하여 $\alpha-2=0$, $3-\beta=0$ 즉, $\alpha=2$, $\beta=3$이어야 한다.

(b) $y=a^{2x-4}+3$이 점 $(\alpha, \beta)$를 지나므로 $\beta=a^{2\alpha-4}+3$; $a^{2\alpha-4}+3-\beta=0$이고 $a$에 관계없이 등식이 성립하기 위하여 $2\alpha-4=0$, $3-\beta=-1$ 즉, $\alpha=2$, $\beta=4$이어야 한다.

## 3.3 연습문제

**1.**

풀이 진수 조건에 의하여 $x^2-2x+a=(x-1)^2-1+a>0$이고, $x>1$이므로 $a-1>0$, 즉 $a>1$이다.

**3.**

풀이 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\log_2 f(x)=\log_2\left(\frac{1}{4}\right)^x=\log_2 2^{-2x}=-2x$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\left(\frac{1}{4}\right)^{g(x)}=2^{-2\log_2 x}=2^{\log_2 x^{-2}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

이므로 $(g\circ f)(-3)=(-2)\cdot(-3)=6$, $(f\circ g)(4)=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$이다.

**5.**

풀이 $y=\log_2(x^3+1)$라 하면, $x^3+1=2^y$; $x=(-1+2^y)^{1/3}$이므로 역함수는 $f^{-1}(x)=(-1+2^x)^{1/3}$이다. 그러므로 $f^{-1}(1)=1$이고, $(f^{-1}\circ f^{-1})(1)=f^{-1}(1)=1$, $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(1)=f^{-1}(1)=1$이다.

**7.**

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3^{g(x)+1}=x^3$이므로 $g(x)+1=\log_3 x^3$; $g(x)=-1+3\log_3 x$이다. 그러므로 $g(3)=-1+3\log_3 3=-1+3=2$이다.

**9.**

풀이 근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha\beta=\frac{1}{3}$이므로

$\log_3\left|\frac{\beta^2}{\alpha}\right|+\log_3\left|\frac{\alpha^2}{\beta}\right|=\log_3\left|\frac{\beta^2}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{\beta}\right|=\log_3(\alpha\beta)=\log_3\frac{1}{3}=-1$이다.

**11.**

풀이 (a) $y=2^{x-1}+2$를 $x$에 관하여 풀면, $2^{x-1}=y-2$; $x-1=\log_2(y-2)$; $x=1+\log_2(y-2)$이므로 역함수는 $f^{-1}(x)=1+\log_2(x-2)$이고 $f^{-1}(6)=1+\log_2 4=3$이다.

(b) $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$를 $x$에 관하여 풀면, $y(2^x+1)=2^x-1$; $y2^x+y=2^x-1$; $2^x=\frac{y+1}{1-y}$;

$x=\log_2\left|\frac{y+1}{1-y}\right|$이므로 역함수는 $f^{-1}(x)=\log_2\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$이고

$f^{-1}(6)=\log_2\left|\frac{6+1}{1-6}\right|=\log_2\frac{7}{5}$이다.

## 3.4 연습문제

**1.**

풀이 (a) $\sinh x=\dfrac{2}{3}$이면, $\cosh^2 x=1+\sinh^2 x=1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{13}{9}$이므로 $\cosh x=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$이다.

그러므로 $\tanh x=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{cosech} x=\dfrac{3}{2}$, $\operatorname{sech} x=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$, $\coth x=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$이다.

(b) $\cosh x=2$이면, $\sinh^2 x=\cosh^2 x-1=4-1=3$이고, $x>0$이므로 $\sinh x=\sqrt{3}$이다. 그러므로 $\tanh x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{cosech} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{sech} x=\dfrac{1}{2}$, $\coth x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

**3.**

풀이 $\sinh 2x=2\sqrt{2}$이면, $\cosh^2 2x=1+\sinh^2 2x=1+(2\sqrt{2})^2=9$이므로 $\cosh 2x=3$이다. $\cosh^2 x=\dfrac{\cosh 2x+1}{2}=2$이므로 $\cosh x=\sqrt{2}$이다. $\sinh^2 x=\dfrac{\cosh 2x-1}{2}=1$이므로 $\sinh x=\pm 1$이다. 따라서 $\tanh x=\pm\sqrt{2}$이다.

**5.**

풀이 (a) $\cosh(2x)+\cosh x=2\cosh\dfrac{3x}{2}\cosh\dfrac{x}{2}$

(b) $\sinh(4x)-\sinh(2x)=2\cosh\dfrac{6x}{2}\sinh\dfrac{2x}{2}=2\cosh(3x)\sinh x$

# 제3장 연습문제

**3.1**

풀이 $\dfrac{1}{\log_{21} 9}+\log_3 \dfrac{81}{49}=\dfrac{\log_3 3\cdot 71}{\log_3 3^2}+\log_3 3^4-\log_3 7^2=\dfrac{1}{2}(\log_3 3+\log_3 7)+4-2\log_3 7$

$$=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\log_3 7$$

3.3

풀이 $\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4=\log_3 \dfrac{6\cdot 2}{4}=\log_3 3=1$

3.5

풀이 $a=\log_3(2+\sqrt{3})$이므로 $3^a=2+\sqrt{3}$ 이고

$$9^a+\frac{1}{9^a}=(3^a)^2+\frac{1}{(3^a)^2}=\left(3^a+\frac{1}{3^a}\right)^2-2$$

$$=\left(2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^2-2=\left[2+\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})\right]^2-2$$

$$=16-2=14$$

3.7

풀이 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ 이므로

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2015\cdot 2016}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}$$

이고, $a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_{2015}=2^{\frac{2015}{2016}}=2^k$이므로 $k=\dfrac{2015}{2016}$ 이다.

3.9

풀이 $4^a=12^b=9$ 이므로 $a=\log_4 9=\dfrac{\log_3 9}{\log_3 4}$, $b=\log_{12} 9=\dfrac{\log_3 9}{\log_3 12}$ 이고

따라서 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{\log_3 12}{\log_3 9}-\dfrac{\log_3 4}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 12-\log_3 4}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 \dfrac{12}{4}}{\log_3 3^2}=\dfrac{\log_3 3}{2\log_3 3}=\dfrac{1}{2}$ 이다.

3.11

풀이 $2^{-x}-6+2^{x+3}=0$; $\dfrac{1}{2^x}-6+8\cdot(2^x)=0$;

$8\cdot(2^x)^2-6\cdot(2^x)+1=\left(2\cdot(2^x)-1\right)\left(4\cdot(2^x)-1\right)=\left(2^{x+1}-1\right)\left(2^{x+2}-1\right)=0$;

$2^{x+1}=1$, $2^{x+2}=1$; $x+1=0$, $x+2=0$; $x=-1$, $x=-2$

3.13

풀이 $x^{\log_2 x}=\dfrac{x^4}{8}$; $\log_2\left(x^{\log_2 x}\right)=\log_2\left(\dfrac{x^4}{8}\right)$; $(\log_2 x)^2=\log_2 x^4-\log_2 8=4\log_2 x-3$;

$(\log_2 x)^2-4(\log_2 x)+3=(\log_2 x-1)(\log_2 x-3)=0$;

$\log_2 x=1$, $\log_2 x=3$; $x=2$, $x=2^3=8$

3.15

풀이 $(2^x-1)\left((2^x)^2-4\right)=(2^x-1)(2^x-2)(2^x+2)=0$; 모든 실수 $x$에 대하여 $2^x>0$이므로 $2^x=1$, $2^x=2$; $x=0$, $x=1$

3.17

풀이 $y=2^x$을 $x$축 방향으로 $a$만큼, $y$축 방향으로 $b$만큼 평행이동시키면 $y=b+2^{x-a}$이고, 두 점 $(-1,1)$, $(0,5)$를 지나므로 $b+2^{-1-a}=1$, $b+2^{-a}=5$이다.

따라서 $1-2^{-1-a}=5-2^{-a}$; $2^{-a}=8=2^3$; $a=-3$, $b=-3$이다.

3.19

풀이 $x\ge 0$에서 $y=2^x+1\ge 2$이고 $x=\log_2(y-1)$이므로 역함수는 $f^{-1}(x)=\log_2(x-1)$, $x\ge 2$이다. 또한 $x<0$에서 $y=2-x^2<2$이고 $x=-\sqrt{2-y}$이므로 역함수는 $f^{-1}(x)=-\sqrt{2-x}$, $x<2$이다. 그러므로 주어진 함수 $y=f(x)$의 역함수는

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\log_2(x-1), & x\ge 2\\ -\sqrt{2-x}, & x<2\end{cases}$$

이다. $f^{-1}(-2)\cdot f^{-1}(k)=-1$; $(-4)\cdot f^{-1}(k)=-1$; $f^{-1}(k)=4$; $\log_2(x-1)=4$; $x-1=2^4$; $x=17$

3.21

풀이 $2^x = t$라 하면 $x = \log_2 t$, $t > 0$이므로 $f(t) = 1 + \log_2 t^2$, $t > 0$이다. 즉,
$f(x) = 1 + 2\log_2 x$, $x > 0$이고, $f(\sqrt{2}) = 1 + \log_2 (\sqrt{2})^2 = 1 + \log_2 2 = 1 + 1 = 2$이다.