6.1 연습문제

1.

풀이 $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(-x) = -\lim_{x\to 0-} x = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 그러나

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{-(0+h)-(-0)}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{(0+h)^2-0}{h} = \lim_{h\to 0+} h = 0$$

이므로 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$이고, 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

3.

풀이 $x=-1$에서 미분계수를 구하면 다음과 같다.

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[-(-1+h)^2+(-1+h)]-(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3h-h^2}{h} = 3$$

따라서 점 $(-1, -2)$에서 접선의 방정식은

$$y-(-2) = 3(x-(-1));\ y = 3x+1$$

이고, 법선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 법선의 방정식은

$$y-(-2) = -\frac{1}{3}(x-(-1));\ y = -\frac{1}{3}(x-7)$$

이다.

5.

풀이 $x=1$에서 미분계수를 구하면 다음과 같다.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[(1+h)^3+(1+h)a+1]-(a+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(h^2+3h+a+3) = a+3$$

조건에 의하여 $x=1$에서 미분계수가 -2이므로 $a+3=-2$, $a=-5$이다.

7.

풀이 (a) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2)-2}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^3-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

$$= f'(1) \cdot \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = f'(1) = -1$$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-xf(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{[f(x)-f(1)]-(x-1)f(1)}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} + \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)f(1)}{x-1}$$

$$= f'(1) + f(1) = -2 + 2 = 0$$

6.2 연습문제

1.

풀이 (a) $f'(x)=(x^4-2x^2+1)'=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

(b) $f'(x)=(3x^2-1)'(2x+3)+(3x^2-1)(2x+3)'$

$$=(6x)(2x+3)+(3x^2-1)(2)=18x^2+18x-2$$

(c) $f'(x)=\dfrac{(x^2+x+1)'(x-1)-(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$$=\frac{(2x^2-x-1)-(x^2+x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

(d) $f'(x)=\dfrac{(x^2-2x+2)'(x^2-1)-(x^2-2x+2)'(x^2-1)'}{x^2-1}$

$$=\frac{(2x^3-2x^2-2x+2)-(2x^3-4x^2+4x)}{(x^2-1)^2}=\frac{2(x^2-3x+1)}{(x^2-1)^2}$$

3.

풀이 (a) $y=x^3+1$이므로 $x^3=y-1,\ x=\sqrt[3]{y-1}$이다.

(b) $x=\sqrt[3]{y-1}=(y-1)^{\frac{1}{3}}$이므로 $u=y-1$이라 하면, $x=u^{\frac{1}{3}}$이고 $\dfrac{du}{dy}=1$, $\dfrac{dx}{du}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$이므로 역함수의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dy}=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot 1=\frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}$$

(c) $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$이므로 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{dx/dy}=\dfrac{1}{3x^2}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}$이고, (b)에서 구한 도함수와 일치한다.

5.

풀이 (a) $\dfrac{dy}{dx}=5x^4-6x^2+1$이므로 역함수의 도함수는 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{dy/dx}=\dfrac{1}{5x^4-6x^2+1}$이다.

(b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(x^2+1)-x(2x)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$이므로 역함수의 도함수는 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{dy/dx}=\dfrac{(x^2+1)^2}{1-x^2}$이다.

7.

풀이 곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 임의의 점 (x, y)에서 접선의 기울기를 구하기 위하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다. 따라서 y를 x의 함수로 간주하고 양변을 x에 관하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2-y^2)=\frac{d}{dx}(1)=0;\ 2x-2y\frac{dy}{dx}=0;\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

이다. 그러므로 점 $(2, \sqrt{3})$에서 접선의 기울기는

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\ y=\sqrt{3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-2);\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

9.

풀이 (a) 분모를 인수분해하여, 각 인수를 분모로 가지는 부분분수의 합으로 표현한다.

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

이제 미정계수 A와 B를 구하기 위하여 우변의 식을 통분하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1}$$

그러므로 위의 식이 항등식이 되기 위하여 연립방정식 $A+B=0$, $A-B=1$이 성립하여야 한다. 따라서 $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$이고, $f(x)$를 부분분수는 다음과 같다.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

(b) $f(x)$의 n계 도함수를 구하기 위하여, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $h(x)=\dfrac{1}{x+1}$의 n계 도함수를 먼저 구한다.

$$g'(x)=-(x-1)^{-2}\ ,\quad h'(x)=-(x+1)^{-2}$$
$$g''(x)=(-1)^2(2!)(x-1)^{-3}\ ,\quad h''(x)=(-1)^2(2!)(x+1)^{-3}$$
$$g'''(x)=(-1)^3(3!)(x-1)^{-4}\ ,\quad h'''(x)=(-1)^3(3!)(x+1)^{-4}$$
$$g^{(4)}(x)=(-1)^4(4!)(x-1)^{-5}\ ,\quad h^{(4)}(x)=(-1)^4(4!)(x+1)^{-5}$$

이므로 $g(x)$, $h(x)$의 n계 도함수는

$$g^{(n)}(x)=(-1)^n(n!)(x-1)^{-(n+1)},\quad h^{(n)}(x)=(-1)^n(n!)(x+1)^{-(n+1)}$$

이다. 따라서 $f(x)$의 n계 도함수는 다음과 같다.

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}g^{(n)}(x) - \frac{1}{2}h^{(n)}(x)$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^n(n!)(x-1)^{-(n+1)} - \frac{1}{2}(-1)^n(n!)(x+1)^{-(n+1)}$$

(c) $f^{(5)}(2) = \frac{1}{2}(-1)^5(5!) - \frac{1}{2}(-1)^5(5!)3^{-6} = -\frac{120}{2} + \frac{120}{2}\frac{1}{729} = -\frac{14560}{243}$ 이다.

6.3 연습문제

1.

풀이 (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\sin x + 3\cos x) = \dfrac{d}{dx}(\sin x) + 3\dfrac{d}{dx}(\cos x)$

$= \cos x + 3(-\sin x) = \cos x - 3\sin x$

(b) $v = x^2$, $u = \cos v$, $y = u^2$이라 하면 $\dfrac{dv}{dx} = 2x$, $\dfrac{du}{dv} = -\sin v$, $\dfrac{dy}{du} = 2u$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dy}{du} = (2x) \cdot (-\sin v) \cdot (2u)$$

$$= -4x\sin(x^2)\cos(x^2) = -2x\sin(2x^2)$$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\sec x \tan x) = (\tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) + (\sec x)\dfrac{d}{dx}(\tan x)$

$= \sec x \tan^2 x + \sec^3 x = \sec x(\tan^2 x + \sec^2 x)$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x\sin(x^2-1)) = (\sin(x^2-1))\dfrac{d}{dx}(x) + (x)\dfrac{d}{dx}(\sin(x^2-1))$

$= \sin(x^2-1) + (x)\dfrac{d}{dx}(\sin(x^2-1))$

이고, $u = x^2 - 1$, $y = \sin u$라 하면 $\dfrac{du}{dx} = 2x$, $\dfrac{dy}{du} = \cos u$이므로

$$\frac{d}{dx}(\sin(x^2-1)) = (2x)\cos(x^2-1)$$

이다. 그러므로 구하고자 하는 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x^2-1) + (x)\frac{d}{dx}(\sin(x^2-1))$$

$$= \sin(x^2-1) + 2x^2\cos(x^2-1)$$

3.

풀이 (a) $y' = (2^x + e^{2x}) = (\ln 2)2^x + 2e^{2x}$

(b) $y' = (x^2+x+1)'e^x + (x^2+x+1)(e^x)'$

$= (2x+1)e^x + (x^2+x+1)e^x = (x^2+3x+2)e^x$

(c) $y' = (3^{\sin x} + \sin^3 x)' = (3^{\sin x})' + (\sin^3 x)'$

$= (\ln 3)3^{\sin x}\cos x + 3\sin^2 x\cos x = \cos x((\ln 3)3^{\sin x} + 3\sin^2 x)$

(d) $v = x^2$, $u = \cos v$, $w = e^u$이라 하면 $\dfrac{dv}{dx} = 2x$, $\dfrac{du}{dv} = -\sin v$, $\dfrac{dw}{du} = e^u$이므로

$$\frac{dw}{dx}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dw}{du}=(2x)\cdot(-\sin v)\cdot(e^u)$$

$$=-2x\sin(x^2)e^{\cos x^2}$$

이고, 따라서

$$y'=\left(e^{\cos x^2}\sin x\right)'=\left(e^{\cos x^2}\right)'\sin x+e^{\cos x^2}(\sin x)'$$

$$=-2x\sin(x^2)e^{\cos x^2}\sin x+e^{\cos x^2}\cos x=\left(\cos x-2x\sin x\sin(x^2)\right)e^{\cos x^2}$$

5.

풀이 (a) $u=2x+1,\ y=\sinh u$라 하면 $\dfrac{du}{dx}=2,\ \dfrac{dy}{du}=\cosh u$이고 따라서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2\cdot\cosh u=2\cosh(2x+1)$$

(b) $u=\sin x-\cos x,\ y=\sin^{-1}u$라 하면 $\dfrac{du}{dx}=\sin x+\cos x,\ \dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$이고

따라서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\cos x+\sin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

(c) $u=x+\ln x,\ y=\cos^{-1}u$라 하면 $\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{1}{x},\ \dfrac{dy}{du}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$이고 따라서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}=-\frac{x+1}{x\sqrt{1-(x+\ln x)^2}}$$

(d) $u=e^{x+2},\ y=\sin^{-1}u$라 하면 $\dfrac{du}{dx}=e^{x+2},\ \dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$이고 따라서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^{x+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$=\frac{e^{x+2}}{\sqrt{1-(e^{x+2})^2}}=\frac{e^{x+2}}{\sqrt{1-e^{2(x+2)}}}$$

6.4 연습문제

1.

풀이 (a) 함수 $y=f(x)$는 다항식이므로 모든 실수에서 미분가능하고 연속이다. 따라서 함수 $y=f(x)$는 폐구간 $[-1,2]$에서 연속이고 개구간 $(-1,2)$에서 미분가능하다. 또한 $f(-1)=f(2)=0$이므로 Rolle의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 $(-1,2)$ 안에 존재한다. 이때 $f'(c)=3c^2-6c=3c(c-2)=0$이고 $-1<c<2$이므로 $c=0$이다.

(b) 함수 $y=f(x)$는 다항식이므로 모든 실수에서 미분가능하고 연속이다. 따라서 함수 $y=f(x)$는 폐구간 $[0,2]$에서 연속이고 개구간 $(0,2)$에서 미분가능하다. 또한 $f(0)=f(2)=3$이므로 Rolle의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 $(0,2)$ 안에 존재한다. 이때 $f'(c)=4c^3-6c^2=2c^2(2c-3)=0$이고 $0<c<2$이므로 $c=\dfrac{3}{2}$이다.

3.

풀이 (a) 함수 $f(x)=\sin x$에 대하여 $f'(x)=\cos x$이므로 $a=\dfrac{\pi}{6}$, $h=\dfrac{\pi}{36}$라 하면, 구하고자 하는 근삿값은 다음과 같다.

$$\sin\frac{7\pi}{36}=f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{36}\right)\fallingdotseq f\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{36}\cdot f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{36}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{36}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0.5736$$

(b) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$에 대하여 $f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$이므로 $a=1$, $h=0.01$이라 하면, 구하고자 하는 근삿값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{1+1.01^2}=f(1+0.01)\fallingdotseq f(1)+(0.01)\cdot f'(1)$$

$$=\frac{1}{1+1^2}+(0.01)\cdot\left(-\frac{2\cdot 1}{(1+1^2)^2}\right)=0.495$$

(c) 함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로 $a=1$, $h=0.04$라 하면, 구하고자 하는 근삿값은 다음과 같다.

$$\ln(1.04)=f(1+0.04)\fallingdotseq f(1)+(0.04)\cdot f'(1)=0+(0.04)\cdot 1=0.04$$

(d) 함수 $f(x)=e^x$에 대하여 $f'(x)=e^x$이므로 $a=0$, $h=0.2$라 하면, 구하고자 하는 근삿값은 다음과 같다.

$$e^{0.2}=f(0+0.2)\fallingdotseq f(1)+(0.2)\cdot f'(1)=e^0+(0.2)\cdot e^0=1.2$$

5.

풀이 (a) $y = x^{\frac{1}{x}}$이라 하면, $\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\ln x}{x}$이므로

$$\lim_{x \to \infty} \ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

이다. 그러므로

$$\lim_{x \to \infty} \ln y = \ln\left(\lim_{x \to \infty} y\right) = 0 = \ln 1$$

이고, 따라서 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$이다.

(b) $y = x^x$이라 하면, $\ln y = \ln x^x = x \ln x$이므로

$$\lim_{x \to 0+} \ln y = \lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

이다. 그러므로

$$\lim_{x \to 0+} \ln y = \ln\left(\lim_{x \to 0+} y\right) = 0 = \ln 1$$

이고, 따라서 $\displaystyle\lim_{x \to 0+} y = \lim_{x \to 0+} x^x = 1$이다.

6.5 연습문제

1.

풀이 (a) $f'(x) = 2x - 4$로부터 $f'(2) = 0$이므로 $x < 2$이면 $f'(x) < 0$이고, 따라서 $f(x)$는 감소한다. 그리고 $x > 2$이면 $f'(x) > 0$이고, 따라서 $f(x)$는 증가한다. 그러므로 $f(x)$가 감소하는 구간은 $x < 2$이고, 증가하는 구간은 $x > 2$이다.

(b) $f'(x) = 3x^2 - 4x^2 - 4 = (3x+2)(x-2)$로부터 $f'\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$, $f'(2) = 0$이다. $x < -\frac{2}{3}$이면 $f'(x) > 0$이고, 따라서 $f(x)$는 증가한다. 그리고 $-\frac{2}{3} < x < 2$이면 $f'(x) < 0$이고, 따라서 $f(x)$는 감소한다. 또한 $x > 2$이면 $f'(x) > 0$이고, 따라서 $f(x)$는 증가한다. 그러므로 $f(x)$가 감소하는 구간은 $-\frac{2}{3} < x < 2$이고, 증가하는 구간은 $x < -\frac{2}{3}$, $x > 2$이다.

(c) $f(x)$의 정의역은 $x > 0$이고 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$로부터 $f'(1) = 0$이므로 $0 < x < 1$이면 $f'(x) < 0$이고, 따라서 $f(x)$는 감소한다. 그리고 $x > 1$이면 $f'(x) > 0$이고, 따라서 $f(x)$는 증가한다. 그러므로 $f(x)$가 감소하는 구간은 $0 < x < 1$이고, 증가하는 구간은 $x > 1$이다.

(d) $f(x)$의 정의역은 $x \neq 0$인 모든 실수이고 $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$이므로 $f'(2) = 0$이고 $f'(0)$은 존재하지 않는다. $x < 0$이면 $f'(x) < 0$이고, 따라서 $f(x)$는 감소한다. 그리고 $0 < x < 2$이면 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 감소하고, $x > 2$이면 $f'(x) > 0$이고, 따라서 $f(x)$는 증가한다. 그러므로 $f(x)$가 감소하는 구간은 $x < 0$, $0 < x < 2$이고, 증가하는 구간은 $x > 2$이다.

3.

풀이 (a) $f'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x-1)(x-5)$이므로 임계점은

$$f'(x) = 0; \quad -3(x-1)(x-5) = 0 \ ; \ x = 1, \ x = 5$$

이다. 따라서 증감표를 작성하면, 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$	8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	극소 -6	↗	극대 26	↘	-55

그러므로 $x = 1$에서 극솟값 -6이고, $x = 5$에서 극댓값 26이다. 또한 $f(0) = 1$, $f(8) = -55$이므로 최댓값은 26이고 최솟값은 -55이다.

(b) $f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$이므로 임계점은 $f'(x)$가 존재하지 않는 $x = 0$과

$$f'(x) = 0; \quad (x-1)(x+1) = 0 \ ; \ x = -1, \ x = 1$$

이다. 따라서 증감표를 작성하면, 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	극대 -2	$\searrow$		$\searrow$	극소 2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

그러므로 $x=-1$에서 극댓값 -2이고, $x=1$에서 극솟값 2이다. 또한 $f(-2)=-\frac{5}{2}$, $f(2)=\frac{5}{2}$이지만, $\lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$이므로 최솟값과 최댓값은 존재하지 않는다.

(c) $x>0$에서 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$이므로 임계점은

$$f'(x)=0;\quad x=1$$

이다. 따라서 증감표를 작성하면, 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	극소 1	$\nearrow$	$2-\ln 2$

그러므로 $x=1$에서 극솟값 1이다. 또한 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$이고 $f(2)=2-\ln 2$이므로 최솟값은 1이고 최댓값은 존재하지 않는다.

(d) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{4-x}\,\sqrt{x}}$이므로 임계점은

$$f'(x)=0;\quad \sqrt{4-x}-\sqrt{x}=0\ ;\ x=2$$

이다. 따라서 증감표를 작성하면, 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	극대 $2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

그러므로 $x=2$에서 극솟값 $2\sqrt{2}$이다. 또한 $f(0)=f(4)=2$이므로 최댓값은 $2\sqrt{2}$이고 최솟값은 2이다.

(e) $f'(x)=2x(x+1)e^{2x}$이므로 임계점은

$$f'(x)=0;\quad 2x(x+1)=0\ ;\ x=-1,\ x=0$$

이다. 따라서 증감표를 작성하면, 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$4e^{-4}$	$\nearrow$	극대 e^{-2}	$\searrow$	극소 0	$\nearrow$	e^2

그러므로 $x=-1$에서 극댓값 e^{-2}이고, $x=0$에서 극솟값 0이다. 또한 $f(-2)=4e^{-4}$, $f(1)=e^2$이므로 최댓값은 e^2이고 최솟값은 0이다.

(f) $f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$이므로 $[-2\pi, 2\pi]$에거 임계점은

$$f'(x)=0;\quad x\sin x=0\ ;\ x=-\pi,\ x=0,\ x=\pi$$

이다. 따라서 증감표를 작성하면, 다음과 같다.

x	-2π	$\cdots$	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2π	↘	극소 $-\pi$	↗	극값 없음	↗	극대 π	↘	-2π

그러므로 $x=-\pi$에서 극댓값 $-\pi$이고, $x=\pi$에서 극솟값 π이다. 그리고 $f(-2\pi)=2\pi$, $f(2\pi)=-2\pi$이므로 최댓값은 2π이고 최솟값은 -2π이다.

5.

풀이 (a) 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $x\neq -1, 1$인 모든 실수이고, $f(0)=0$이므로 절편은 원점뿐이다. 한편

$$f'(x)=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2},\quad f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

이므로 $f'(x)=0$ 또는 $f'(x)$가 존재하지 않는 임계점은 없다. 그리고 $f''(x)=0$인 변곡점은 $x=0$이다. 이제 $f'(x)$와 $f''(x)$의 부호와 함수 f의 증가·감소 그리고 극점과 볼록성은 다음 표와 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	$-$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↘ ⌒		↘ ⌣	변곡점 0	↘ ⌒		↘ ⌣

더욱이

$$\lim_{x\to -1-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to -1+}\frac{x}{x^2-1}=\infty,\quad \lim_{x\to 1-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+}\frac{x}{x^2-1}=\infty$$

이므로 수직 점근선은 $x=-1$, $x=1$이고, $\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$, $\lim_{x\to \infty}\frac{x}{x^2-1}=0$

이므로 수평 점근선 $y=0$을 갖는다. 이와 같은 사실을 종합하여 그래프를 그리면 아래 그림 (a)와 같다.

(b) 함수 $y=f(x)$의 정의역은 모든 실수이고, $f(0)=0$이므로 절편은 원점뿐이다. 한편

$$f'(x)=-\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2},\quad f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

이므로 $f'(x)=0$인 임계점은 $x=-1, 1$이다. 그리고 $f''(x)=0$인 변곡점은 $x=0, \pm\sqrt{3}$이다. 이제 $f'(x)$와 $f''(x)$의 부호와 함수 f의 증가·감소 그리고 극점과 볼록성은 다음 표와 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	변곡점	$\searrow$	극소	$\nearrow$	변곡점	$\nearrow$	극대	$\searrow$	변곡점	$\searrow$
	$\frown$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\smile$	$-\dfrac{1}{2}$	$\smile$	0	$\frown$	$\dfrac{1}{2}$	$\frown$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\smile$

더욱이

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0, \ \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

이므로 수평 점근선 $y=0$ 을 갖는다. 이와 같은 사실을 종합하여 그래프를 그리면 아래 그림 (b)와 같다.

(c) 함수 $y=f(x)$의 정의역은 모든 실수이고, $f(0)=0$이므로 절편은 원점뿐이다. 한편

$$f'(x) = -x(x-2)e^{-x}, \ f''(x) = (x^2-4x+2)e^{-x}$$

이므로 $f'(x)=0$인 임계점은 $x=0, 2$이다. 그리고 $f''(x)=0$인 변곡점은 $x=2\pm\sqrt{2}$이다. 이제 $f'(x)$와 $f''(x)$의 부호와 함수 f의 증가·감소 그리고 극점과 볼록성은 다음 표와 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	변곡점	$\nearrow$	극대	$\searrow$	변곡점	$\searrow$
	$\smile$	0	$\smile$		$\frown$	$4e^{-2}$	$\frown$		$\smile$

여기서 $f(2-\sqrt{2}) = (6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$, $f(2+\sqrt{2}) = (6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$이고, 더욱이 로피탈의 정리에 의하여 $\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = 0$이므로 수평 점근선 $y=0$ 을 갖는다. 이와 같은 사실을 종합하여 그래프를 그리면 아래 그림 (c)와 같다.

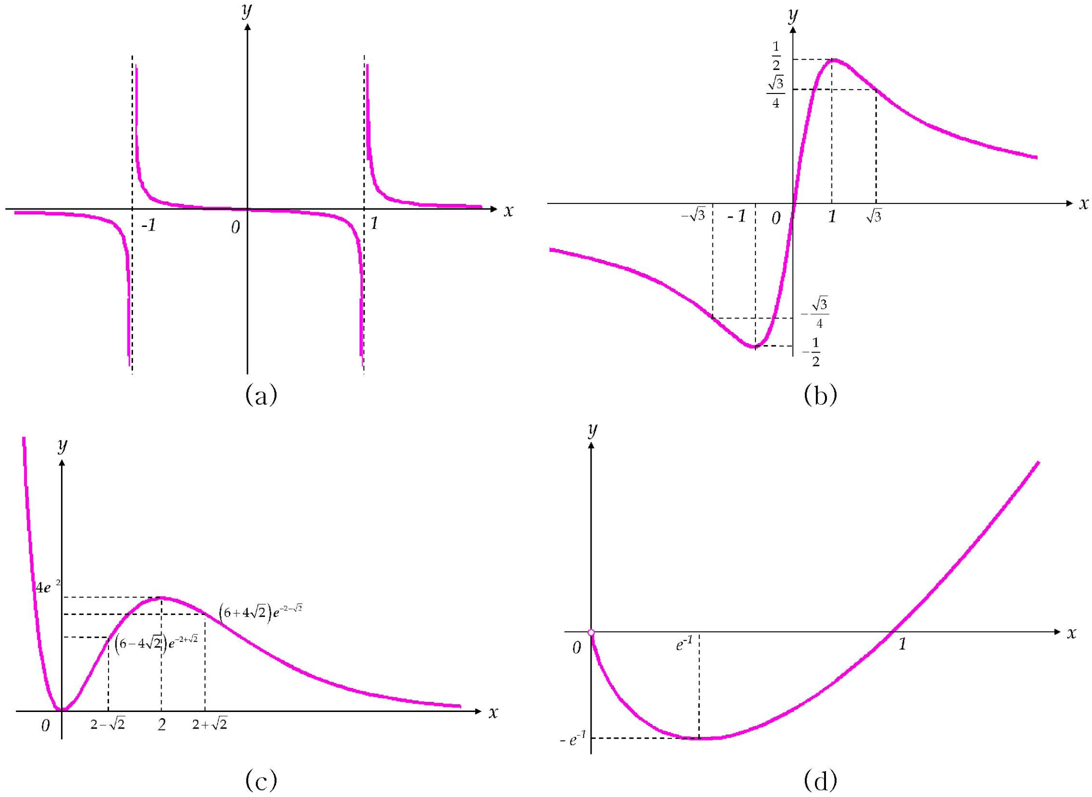
(d) 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $x>0$이고, $f(1)=0$이므로 x축 절편은 $x=1$이다. 한편

$$f'(x) = 1+\ln x, \ f''(x) = \frac{1}{x}$$

이므로 $f'(x)=0$인 임계점은 $x=e^{-1}$이다. 그리고 $f''(x)=0$인 변곡점은 존재하지 않는다. 이제 $f'(x)$와 $f''(x)$의 부호와 함수 f의 증가·감소 그리고 극점과 볼록성은 다음 표와 같다.

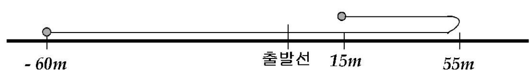
x	0	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$
		$\smile$	$-e^{-1}$	$\smile$

이와 같은 사실을 종합하여 그래프를 그리면 아래 그림 (d)와 같다.



7.

풀이 자동차가 처음 10초 동안 40m를 전진하였으므로 출발선에서 55m 떨어진 곳에서 유턴하여 출발선에서 60m 떨어진 곳에서 멈추었으므로 자동차의 움직인 경로는 아래 그림과 같다.



이제 자동차가 처음 출발할 때의 위치를 x_0, 멈춘 위치를 x_1이라 하면, 변위는

$$\Delta x = x_1 - x_0 = (-60) - 15 = -75\,(\mathrm{m})$$

이고, 자동차가 움직이기 시작하여 멈출 때까지 걸린 시간이 50초이므로 평균속도는

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-75}{50-0} = -1.5\,(\mathrm{m/s})$$

이다. 한편 이 자동차가 15m 지점에서 출발하여 40m를 전진한 55m 위치에서 유턴하여 115m 떨어진 지점인 출발선에서 60m 떨어진 곳에서 멈추었으므로 이 자동차가 움직인 전체 거리는 155m이다. 따라서 평균속력은 평균 속력 $= \dfrac{155}{50} = 3.1\,(\mathrm{m/s})$이다.

제6장 연습문제

6.1

풀이 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[2(x+h)+3]^2-(2x+3)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h(4x+6+2h)}{h}=2\lim_{h\to 0}(4x+6+2h)=8x+12$$

6.3

풀이 $$f_+'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0+}h=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0-}h=0$$

이므로 $f_+'(x)=f_-'(x)$ 이고, 따라서 $x=0$에서 미분계수는 $f'(0)=0$이다.

6.5

풀이 (a) $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)+g(x)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x^2-1}+\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}+\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}+g'(1)\cdot\frac{1}{2}=1$$

(b) $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-0}{x^2-1}+\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}+\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$=f'(1)\cdot\frac{1}{2}+g'(1)\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

6.7

풀이 $u=x+\sqrt{x}$, $u=\sqrt{u}$라 하면, $\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$$

6.9

풀이 $u=x+\sin 2x$, $u=\tan u$라 하면, $\dfrac{du}{dx}=1+2\cos 2x$, $\dfrac{dy}{du}=\sec^2 u$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(1+2\cos 2x)\sec^2(x+\sin 2x)$$

6.11

풀이 $u=x+\ln 2x$, $u=\cos u$라 하면, $\dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}$, $\dfrac{dy}{du}=-\sin u$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{x+1}{x}\sin(x+\ln 2x)$$

6.13

풀이 $f'(x)=-2x+(x\ln 2x)'=-2x+\left(\ln 2x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=-2x+1+\ln 2x$

6.15

풀이 y를 x의 함수로 간주하고 양변을 x에 관하여 미분한다.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=0;\quad \frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$$

그러므로 점 (x_0, y_0)에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

6.17

풀이 $f(2)=-\dfrac{8}{7}$이고 $f'(x)=-\dfrac{37}{(2x-11)^2}$이므로 $f'(2)=-\dfrac{37}{49}$이다. 그러므로

$$(f^{-1})'\left(-\frac{8}{7}\right)=\frac{1}{f'(2)}=-\frac{49}{37}$$

이다.

6.19

풀이 $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\operatorname{cosec}x=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0\cdot 1=0$

6.21

풀이 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0$

6.23

풀이 함수 $y=f(x)$의 정의역은 $x\neq 1$인 모든 실수이고, $f(0)=-1$이므로 y축 절편은 -1이다. 한편

$$f'(x)=-\frac{3x^2}{(x^3-1)^2},\ f''(x)=\frac{6x(1+2x^3)}{(x^3-1)^3}$$

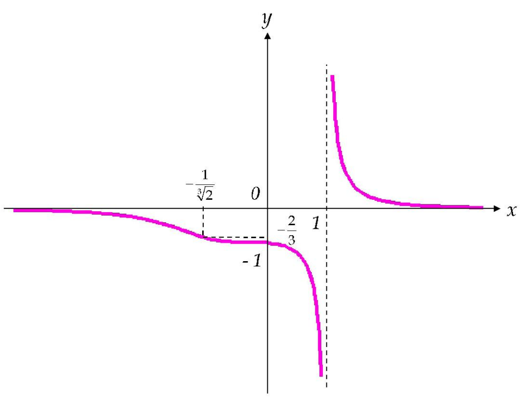
이므로 $f'(x)=0$인 임계점 $x=0$이다. 그리고 $f''(x)=0$인 변곡점은 $x=0$, $x=-2^{-1/3}$이다. 이제 $f'(x)$와 $f''(x)$의 부호와 함수 f의 증가·감소 그리고 극점과 볼록성은 다음 표와 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	변곡점	$\searrow$	변곡점, 극소	$\nearrow$		$\searrow$
	$\frown$	$-\frac{2}{3}$	$\smile$	-1	$\frown$		$\smile$

더욱이

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{x^3-1}=-\infty,\ \lim_{x\to 1+}\frac{1}{x^3-1}=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3-1}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3-1}=0$$

이므로 수직 점근선은 $x=1$이고, 수평 점근선 $y=0$을 갖는다. 이와 같은 사실을 종합하여 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.

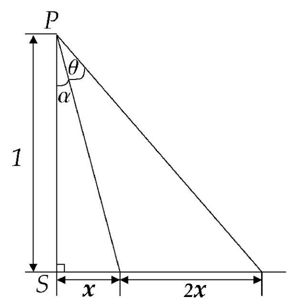


6.25

풀이 우선 중간값 정리에 의하여 실근의 존재성을 보인다. 이를 위하여 $f(x)=x^3+x-1$이라 하면, $f(-1)=-3<0$, $f(1)=1>0$이고 $f(x)$가 다항함수이므로 폐구간 $[-1,1]$에서 연속이다. 따라서 중간값 정리에 의하여 $f(c)=0$, 즉 $c^3+c-1=0$을 만족하는 실수 c가 개구간 $(-1,1)$ 안에 적어도 하나 존재한다. 이제 이와 같은 실근 c가 유일하게 존재하는 것을 보이기 위하여 주어진 방정식 $x^3+x-1=0$을 만족하는 서로 다른 두 실근을 a, b라 하자. 그러면 $f(a)=f(b)=0$이고 $f(x)$가 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이고 미분가능하다. 그러므로 $f(x)$는 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고, 개구간 (a,b)에서 미분가능하다. 따라서 Rolle의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족하는 실수 c가 (a,b) 안에 존재해야 한다. 그러나 $f'(x)=3x^2+1$이고, 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 $f'(c)=0$을 만족하는 실수 c가 존재하지 않는다. 그러므로 방정식 $x^3+x-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다.

6.27

풀이 우선 오른쪽 그림과 같이 출발선을 S, 아나운서의 위치를 P라 하자. 그리고 아나운서가 바라보는 두 선수의 사잇각을 θ 그리고 아나운서가 있는 스탠드와 뒤를 쫓는 선수 사이의 사잇각을 α라 하자. 그러면 선두로 달리는 선수가 뒤에 있는 선수보다 3배 빠르므로 출발선에서 뒤에 있는 선수까지의 거리를 x라 하면, 선두로 달리는 선수까지의 거리는 $3x$이다. 이때 아나운서가 선두에 있는 선수를 바라보는 각도는 $\alpha+\theta$이고, 따라서 다음 등식을 얻는다.



$$\tan\alpha=\frac{x}{1}=x,\ \tan(\alpha+\theta)=\frac{3x}{1}=3x$$

그러면 $0<\theta<\pi/2$이므로 사잇각 θ의 최대값을 구하기 위하여 $\tan\theta$의 최대값을 구하면 된다. 한편 관계식

$$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}$$

으로부터

$$\frac{x+\tan\theta}{1-x\tan\theta}=3x \quad \text{또는} \quad \tan\theta=\frac{2x}{1+3x^2}$$

을 얻는다. 이때 x는 출발선에서 뒤를 쫓는 선수까지의 거리이므로 $x>0$이다. 이제 $\tan\theta$의 최대값을 구하기 위하여 $T(x)=\tan\theta$라 놓고, $T(x)$의 극값을 조사한다.

$$\frac{dT}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)=\frac{2(1-\sqrt{3}\,x)(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+3x^2)^2}$$

그러므로 임계값은 $x=1/\sqrt{3}$, $x=-1/\sqrt{3}$이지만 $x>0$이므로 $x=-1/\sqrt{3}$은 제외한다. 한편 $x=1/\sqrt{3}$ 부근에서 T의 증감을 조사하면, 다음 표와 같다.

x	0	$\cdots$	$1/\sqrt{3}$	$\cdots$
S'		$+$	0	$-$
S		$\nearrow$	극대 $1/\sqrt{3}$	$\searrow$

그러므로 $x=1/\sqrt{3}$에서 T는 극대값을 가지며 또한 최대값을 갖는다. 즉, $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$이므로 $\theta=\pi/6$이다.

6.29

풀이 (a) $0.5 \leqq t \leqq 2.5$이므로 $\Delta t = 2$초 동안에 이루어진 속도의 변화는

$$\Delta v = v(2.5) - v(0.5) = 6.75 - 0.75 = 6$$

이고, 따라서 평균가속도는 $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{6}{2} = 3$(㎨)이다.

(b) $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = 6(t-1)$이므로 $t=2$에서 이 입자의 가속도는 $a(2)=6(2-1)=6$(㎨)이다.

6.31

풀이 (a) $x(0)=0$, $x(1.5)=-2.25$이므로 $\Delta t = 1.5$동안에 이루어진 변위는 $\Delta x = -2.25$이고, 평균속도는 $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = -\dfrac{2.25}{1.5} = -1.5$이다.

(b) 입자가 처음 움직이기 시작한 위치에 올 때까지 걸리는 시간을 t_1이라 하면, 변위는

$$\Delta x = x(t_1) - x(0) = (-6t_1 + 3t_1^2) - 0 = 3t_1(t_1 - 2) = 0$$

이므로 $t_1 = 0$과 $t_1 = 2$이고, 따라서 2초 후에 이 입자는 처음 출발할 때의 위치에 놓이게 된다.

(c) $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -6 + 6t = -6(t-1)$이므로 속도가 0이 되는 시각은 $v(t) = -6(t-1) = 0$ 즉, $t=1$이다.

(d) $t=1.5$에서 속도는 $v(1.5) = -6(1.5-1) = -3$(㎧)이고, 이때 속력은 $|v(1.5)| = |-3| = 3$(㎧)이다.

6.33

풀이 안내판을 지나는 순간을 $t=0$이라 하면, $v(0)=100$이고 $a=-5$이다. 한편 자동차가 정지한다면, 그 속도는 0이므로 $v(t) = v(0) + at = 100 - 5t = 0$이고 따라서 20초 후에 정지하게 된다. 또한 $t=0$일 때 $x(0)=0$이므로 20초 후에 정지할 때까지 움직인 거리는

$$x(t) = \frac{1}{2}(-5)(20)^2 + (100)\cdot(20) = 1000(\mathrm{m})$$

이다.