MSE, 기초 선형대수학 : 핵심 개념부터 응용까지

[연습문제 답안 이용 안내]

Chapter 01 연습문제 답안

《Section 1.1》

1. $x+5y-\sqrt{2}\,z=1$:일차방정식이다.

2. $x+3y+xz=2$:일차방정식이 아니다.(xz항)

3. $x=-7y+3z$:일차방정식이다.

4. $x^{-2}+y+8z=5$:일차방정식이 아니다.(x^{-2}항)

5. $xyz=x+2y$:일차방정식이 아니다.(xyz항)

6. $\pi x-\sqrt{2}\,y+\frac{1}{3}z=\sqrt[3]{7}$:일차방정식이다.

7. $x-2y=5$

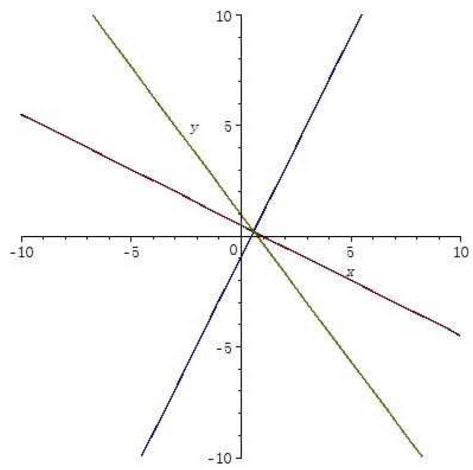
8. $x-2y=-5$

9. $2x-y=-6$

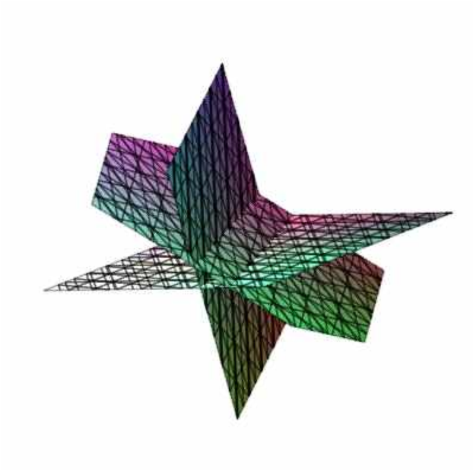
10. $2x-y=-6$

11. $-x+2y=-5$

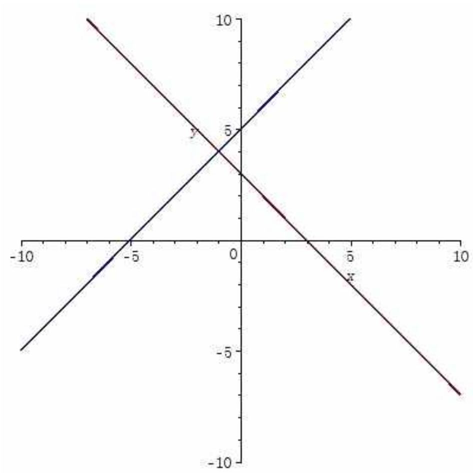
12. $x=\frac{3}{5},y=\frac{1}{5}$



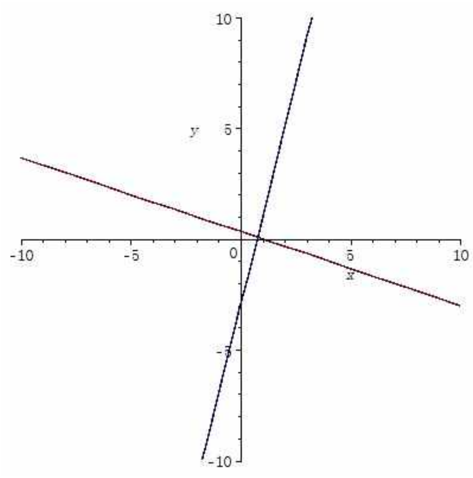
13. 해가없다.



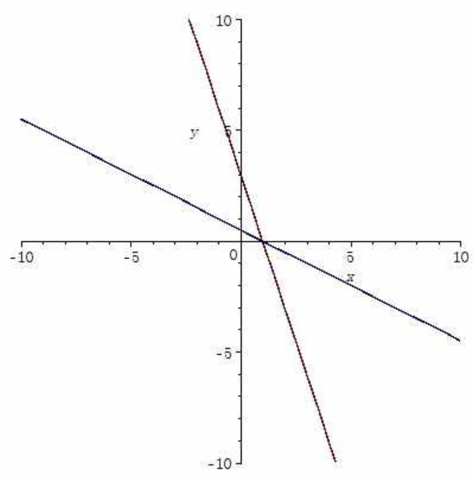
14. $x=-1, y=4$



15. $x=\dfrac{10}{13}, y=\dfrac{1}{13}$



16. $x=1, y=0$



17. (1) k개의 직선이 공통점을 갖지 않는다.
    (2) k개의 직선이 유일한 공통점을 갖는다.
    (3) k개의 직선이 하나의 직선으로 포개어진다.

《Section 1.2》

1. $\{(x,5-x)|x>5, x\in N\}$

2. $\{(10-2y,y)|y=1,2,3,4\}$

3. (2,4)

4. (5,3)

5. (2,3)

6. (-3,1)

7. (1,4)

8. (-5,-2)

9. (-3,2)

10. (7,4)

11. (3,1)

12. (1,-2)

13. (7,-1)

14. (6,5)

15. (6,-2)

16. (-3,3)

17. (4,-2)

18. (2,-1)

19. (1.2, 0.2)

20. 해가 없음

21. (1,2,3)

22. $x = y - 2z + 5, y = y, z = z$

Chapter 02 연습문제 답안

《Section 2.1》

1. $a_{12}=-2,\ a_{22}=-3,\ a_{23}=4$

2. $b_{11}=2,\ b_{31}=5$

3. $c_{13}=2,\ c_{31}=7,\ c_{33}=-1$

4. $6, 3, -1$

5. $a=4, b=-1, c=\dfrac{11}{2}, d=\dfrac{1}{2}$

6. $a=0, b=2, c=1, d=2$

7. $\begin{bmatrix} -2 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 11 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ -12 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 14 & -19 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

10. $AB=\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -6 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

11. $x=0,\ y=-3,\ z=-1,\ w=-1$

12. $x=-1,\ y=-5,\ z=1,\ w=2$

13. AB의 (2,3)-성분 $24+15+20=59$

14. BA의 (2,3)-성분 $0+4+27=31$

15. AB의 첫 번째 행 $\begin{bmatrix} 67 & 41 & 41 \end{bmatrix}$

16. AB의 세 번째 열 $\begin{bmatrix} 41 \\ 59 \\ 57 \end{bmatrix}$

《Section 2.2》

1. $A+B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}=B+A$

2. $A+B+C=\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}=C+B+A$

3. $(-2+3)C=\begin{bmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

4. $-2B+2C=\begin{bmatrix} 4 & -12 & 0 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

5. $A(BC)=(AB)C=\begin{bmatrix} -2 & 34 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$

6. $a(BC)=(aB)C=B(aC)=\begin{bmatrix} 20 & 2 \\ -8 & 22 \end{bmatrix}$

7. $(ab)C=a(bC)=6C=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 18 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

8. $A(B+C^T)=AB+AC^T=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 21 \\ -1 & 16 & 0 \end{bmatrix}$

9. $AB=AC=\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$

10. $A^2-2A=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

11. $3A^3-2A^2+5A-4I_2=\begin{bmatrix}-24 & -30\\ 60 & 36\end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$

13. (2) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ 이라 하면

$$\begin{aligned}A+(B+C)&=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}+c_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{m\times n}\\&=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}+[c_{ij}]_{m\times n}\\&=(A+B)+C\end{aligned}$$

(3) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times r}$, $C=[c_{ij}]_{r\times s}$ 이라 하면

$$\begin{aligned}A(BC)&=[a_{ij}][\sum_{p=1}^{r}b_{ip}c_{pj}]\\&=[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\ (\sum_{p=1}^{r}b_{kp}c_{pj})]=[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{r}a_{ik}\ (b_{kp}c_{pj})]\\&=[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{r}(a_{ik}b_{kp})c_{\pi}]=[\sum_{p=1}^{r}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kp})c_{\pi}]\\&=[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}c_{ij}]=(AB)C\end{aligned}$$

(5) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ 이라 하면

$$(B+C)A=[\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}+c_{ik})a_{kj}]=[\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}+\sum_{k=1}^{n}c_{ik}a_{kj}]=BA+CA$$

(7) $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ 이라 하면

$$(a+b)C=[(a+b)c_{ij}]_{m\times n}=[ac_{ij}+bc_{ij}]_{m\times n}=[ac_{ij}]_{m\times n}+[bc_{ij}]_{m\times n}=aC+bC$$

(8) $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ 이라 하면

$$(ab)C=[abc_{ij}]_{m\times n}=a[bc_{ij}]_{m\times n}=a(bC)$$

(9) $B=[b_{ij}]_{m\times p}$, $C=[c_{ij}]_{p\times n}$ 이라 하면

$$a(BC)=a[\sum_{k=1}^{p}b_{ik}c_{kj}]=[\sum_{k=1}^{p}ab_{ik}c_{kj}]=[\sum_{k=1}^{p}(ab_{ik})c_{kj}]=(aB)C$$

$$a(BC) = a[\sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj}] = [\sum_{k=1}^{p} ab_{ik}c_{kj}] = [\sum_{k=1}^{p} b_{ik}(ac_{kj})] = B(aC)$$

《Section 2.3》

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

3. 비가역

4. 비가역

5. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

6. 비가역

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{7} & -2 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{16}{7} & -1 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} \\ \frac{11}{7} & -1 & \frac{3}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{9}{7} & 1 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

10. 비가역

11. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad a \neq 0$

12. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. $E_1 = E_{12}(2), E_2 = E_2(1/3)$

17. $A^{-1} = E_3(1/3)E_{12}(2)$

18. $A+A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\-b&0&1\end{bmatrix}=2I_3$

19. $A+A^{-1}=\begin{bmatrix}1&c&0\\0&1&0\\0&d&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-c&0\\0&1&0\\0&-d&1\end{bmatrix}=2I_3$

20. $A+A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&e\\0&1&f\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&e\\0&1&f\\0&0&1\end{bmatrix}=2I_3$

21. $(A^k)^{-1}=(AA\cdots A)^{-1}=A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}=(A^{-1})^k$

22. 양변에 A^{-1}을 곱하면 $A^2-2A+3I_n-A^{-1}=0$ 그러므로$A^{-1}=A^2-2A+3I_n$

23. $\begin{bmatrix}\frac{1}{k}&0&0&0\\-\frac{1}{k^2}&\frac{1}{k}&0&0\\\frac{1}{k^3}&-\frac{1}{k^2}&\frac{1}{k}&0\\-\frac{1}{k^4}&\frac{1}{k^3}&-\frac{1}{k^2}&\frac{1}{k}\end{bmatrix}$

24. $E_{12}(a)E_{13}(b)E_{23}(c)$

《Section 2.4 연습문제》

1. 비가역

2. 가역

3. 가역

4. 비가역

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -12 & -1 & 6 \\ 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

7. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $(A^T)^T=A \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

9. $(A+B)^T=A^T+B^T=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

10. $(AC)^T=C^TA^T=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$

11. $(aC)^T=aC^T=\begin{bmatrix} -12 & -4 & -4 \\ 4 & -16 & -8 \end{bmatrix}$

12. 대우인 “$k\neq 0$ 이고 $A\neq 0$이면 $kA\neq 0$을 증명하자.” A의 영 아닌 성분을 a_{ij}라 하면 kA의 (i,j)성분은 ka_{ij}이고 $k\neq 0$이므로 ka_{ij}은 영이 아니다. 그러므로 kA는 영이 아니다.

13. $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$

14. $\det\begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^4 \\ 0 & x+2 & x^3 \\ 0 & 0 & x-4 \end{bmatrix} = (x-1)(x+2)(x-4) \neq 0$

15. 닐포텐시: 3, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

16. 닐포텐시: 3, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. 증명 생략

18. 증명 생략

19. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$이므로 $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0 \neq n$

20. $D^k = \mathrm{diag}(a_{11}^k, a_{22}^k, \ldots, a_{nn}^k) = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix}$

21. 단위행렬 I_n과 행동치 이어야 하므로 주대각선 성분이 모두 영이 아니어야 한다. 또한 그때의 역행렬은 주대각선 성분의 역수임을 알 수 있다. 즉,

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}) = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

22. $P_1^{-1} = [1]$

23. $P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

24. $P_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

25. $P_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

28. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Chapter 03 연습문제 답안

《Section 3.1》

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

4. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= -15 \end{aligned}$$

6. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ REF, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ RREF

   (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

   (4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. $x = 1, y = 2, z = -2$

9. $x = 3, y = -2, z = 4$

10. $x = -5 - 2t, y = t, z = -7 - 3t, w = 4 + t$

11. $x = (15/22)t, y = (35/22)t, z = -(29/11)t, w = t$

12. $x = -5 - 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + 2t, w = t$

13. $x = -13t, y = 10t, z = 3t, w = t$

14. $x = 1, y = 3, z = 1$

15. $w = 1, x = -13, y = 10, z = 3$

16. $x_1 = 2z - 3y - 1/4, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = -1/2z, x_5 = 1/8, x_6 = 1/3$

17. $a = 3$

18. $a \neq 3$

19. $a = 2$

20. $c = 5a - 2b$

21. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{E_{23}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 51 \\ 0 & 1 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & 51 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3}(1/55)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

《Section 3.2》

1. 비자명한 해를 갖는다.

2. 비자명한 해를 갖는다.

3. 자명한 해 만을 갖는다.

4. 자명한 해 만을 갖는다.

5. 자명한 해 만을 갖는다.

6. 비자명한 해를 갖는다.

7. 자명한 해 만을 갖는다.

8. 비자명한 해를 갖는다.

9. $t\begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix}$

10. $t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

11. 계수행렬이 비가역이기 위한 조건은 $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$

12. $A(\mathrm{x}_1+\mathrm{y}_1)=A\mathrm{x}_1+A\mathrm{y}_1=\mathrm{b}+0=\mathrm{b}$

13. $x_1=1, x_2=0, x_3=1$

14. (83,-26,-10)

15. 계수행렬이 가역이므로 자명한해만을 갖는다.

16. $(2,1)$

17. $(-2,1,-3)$

18. 가우스소거법에 의하면 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$

《Section 3.3》

1. $E = E_{12}, F = E_{13}(2), G = E_{23}(-1)$

2. $\mathrm{x} = (6,5,3)$

3. $X = (5,3,1)$

4. $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$

5. $A^{-1} = E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.21863 & -0.41347 & 0.88388 \\ 0.59783 & -0.65914 & -0.45621 \\ 0.77123 & 0.62815 & 0.10308 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17.052 & 0 & 0 \\ 0 & 0.36934 & 0 \\ 0 & 0 & 0.31757 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.21863 & 0.59783 & 0.77123 \\ 0.41347 & 0.65914 & -0.62815 \\ 0.88388 & -0.45621 & 0.10308 \end{pmatrix}$

8. $(2,-1,3)$

9. $(4,2,3)$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

12. 3행은 1행과 2행에 의하여 생성된다.

13. $a = 4, b = 5$

14. $x=\dfrac{2}{3}, y=-\dfrac{2}{3}, z=1$

15. $x=\dfrac{2}{3}, y=-\dfrac{2}{3}, z=1$

《Section 3.4》

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 300 \\ x_2 - x_3 = 100 \\ x_4 - x_3 = 500 \\ x_4 - x_1 = 100 \end{cases}$

2. $i_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}$, $i_2 = 0\mathrm{A}$, $i_3 = 0\mathrm{A}$,$i_4 = \frac{1}{2}\mathrm{A}$,$i_5 = \frac{1}{2}\mathrm{A}$,$i_6 = \frac{1}{2}\mathrm{A}$

3. $i_1 = 3\mathrm{A}$, $i_2 = 2\mathrm{A}$, $i_3 = 1\mathrm{A}$

4. $i_1 = \frac{13}{5}\mathrm{A}$, $i_2 = -\frac{2}{5}\mathrm{A}$, $i_3 = \frac{11}{5}\mathrm{A}$

5. $i_1 = \frac{7}{22}\mathrm{A}$, $i_2 = -\frac{1}{22}\mathrm{A}$, $i_3 = -\frac{8}{22}\mathrm{A}$

6. $Al_2(SO_4)_3 + 3Ba(NO_3)_2 \rightarrow 2Al(NO_3)_3 + 3BaSO_4$

7. $a = -\frac{5}{3}, b = \frac{29}{2}, c = -\frac{227}{6}, d = 33$

Chapter 04 연습문제 답안

《Section 4.1》

1. $0+1+2+1+1=5$

2. $0+0+2+3+2=7$

3. $0+1+2+1+0=4$

4. $0+0+0+1+3=4$

5. $0+1+2+1=4$이므로 짝치환

6. $0+0+0+1=1$이므로 홀치환

7. $0+0+0+0=0$이므로 짝치환

8. $0+1+2+0=3$이므로 홀치환

9. $0+0+1+1=2$이므로 짝치환

10. $0+0+1+3=4$이므로 짝치환

11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4+3=7$

12. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -(2\times 3\times(-5)) = 30$

13. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(2\times5\times3) = -30$

14. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -82$

15. $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2$

16. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$

17. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -30$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

19. 첫 번째 열과 세 번째 열을 교환 했으므로 $|B| = 4$

20. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -8$

21. $|A| = |A^T|$을 이용하면 $|D| = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 4$

22. R_2+4R_3이므로 행렬식 값은 불변이므로 $|E|=-4$이다.

23. $3x-x^2-2=0,\quad x=1\text{ or }2$

24. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & x & -1 \\ -3 & 0 & x \end{vmatrix}=0$ 풀이 :$2x^2+5x-3=0,\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$

25. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y & 1-y \end{vmatrix}$

$=xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

$=xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$

$=x^2y^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=x^2y^2$

26. $E_{54}(-1),\ E_{43}(-1)$의 행연산을 하면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

27. 1열에서 2,3,4열을 빼고 다시 2열에서 3, 4열을 빼면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 & 1 \\ d^2 & 2d+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

28. $|A^2|=|A|^2=(-4)^2=16$

29. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = -\dfrac{1}{4}$

30. $|2A| = 2^n|A| = -2^{n+2}$

31. $|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = -\dfrac{1}{2^{n+2}}$

32. $|AA^T| = |A|^2 = 16$

33. $|AB| = |A||B| = (-4)3 = -12$

34. $|(AB)^{-1}| = |B^{-1}A^{-1}| = |B^{-1}||A^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}\dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-12}$

35. $|B^{-1}A| = \dfrac{1}{|B|}|A| = \dfrac{1}{3}(-4) = \dfrac{-4}{3}$

36. $|A^2B(3A^T)| = |A|^2|B|3^n|A| = 3^n(-4)^3 3 = 3^{n+1}(-4)$

37. $|A|^2 = |A||A^T| = |AA^T| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$이므로 $|A| = \pm 2\sqrt{2}$

38. $|A|^2 = |A^2| = |A|$이므로 $|A|^2 - |A| = 0$이다. $|A| = 0$ 또는 $|A| = 1$.

39. $|A| = |A^T| = |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$이므로 $|A|^2 = 1$이다. $|A| = \pm 1$.

40. $|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |B||P|\dfrac{1}{|P|} = |B|$.

41. $0 = |0| = |A^k| = |A|^k$이므로 $|A| = 0$이다. 행렬 A는 비가역행렬이다.

《Section 4.2》

1. $\begin{bmatrix} -7 & 8 & -13 \\ 5 & 4 & -15 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix}$

2. -34

3. $A(adj\,A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 8 & -13 \\ 5 & 4 & -15 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 0 \\ 0 & 0 & -34 \end{bmatrix} = \det(A)\,I_3$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{25}{39} & -\frac{14}{39} & \frac{7}{39} \\ -\frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{39} & \frac{4}{39} & -\frac{2}{39} \end{bmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12$이므로

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{12} = 0,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{12} = 0,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{12} = 0$$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18$이므로 $x = y = z = w = 0$

10. $x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{11}{47}$ $\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{100}{47}$

11. $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = -2,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = 0,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = 1$

12. $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -5 & 5 & -1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}}=-\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}}=-\dfrac{19}{22}$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{2}{11}$

13. 같은 방법으로 하면 $x=1$, $y=-1$, $z=0$, $w=2$.

14. 같은 방법으로 하면 $x_1=34$, $x_2=22$, $x_3=-\dfrac{16}{3}$, $x_4=-\dfrac{10}{3}$, $x_5=-7$.

15. $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 11 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 11 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}=-\dfrac{1}{11}$

16. $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -32 & -4 \\ 7 & 2 & 14 & -1 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 7 & 2 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}}=-1$

17. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-15$이므로 $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & -10 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\dfrac{-7-22a}{-15}=1$이다. 그러므로 $a=\dfrac{4}{11}$.

18. 행렬식이 ± 1이고 $\operatorname{adj} A$의 성분도 정수이므로 행렬 A^{-1}의 모든 성분이 정수이다.

19. $A(\mathrm{adj}\,A) = (\det A)I_n$이므로 양변에 $\det(A)$을 나누면

$$\left(\frac{1}{\det(A)}A\right)(\mathrm{adj}\,A) = I_n$$

$\therefore [\mathrm{adj}\,A]^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}A = \mathrm{adj}\,A^{-1}.$

20. $A(\mathrm{adj}\,A) = (\det A)I_n$이므로 양변에 행렬식을 취하면

$$\det(A)\det(\mathrm{adj}\,A) = (\det A)^n.$$

$\det(A) = 0$이면 양변 다 0 이므로 성립함.

$\det(A) \neq 0$이면 $\det(\mathrm{adj}\,A) = (\det A)^{n-1}$이다.

21. $A(\mathrm{adj}\,A) = (\det A)I_n$에서 행렬$A$ 대신 행렬 $\mathrm{adj}\,A$를 대입하면

$\mathrm{adj}\,A(\mathrm{adj}(\mathrm{adj}\,A) = (\det(\mathrm{adj}\,A))I_n$이고 양변에 A를 곱하면

$$A\,\mathrm{adj}\,A(\mathrm{adj}(\mathrm{adj}\,A)) = (\det(\mathrm{adj}\,A))A$$

$$\Rightarrow \det(A)(\mathrm{adj}(\mathrm{adj}\,A)) = (\det(A))^{n-1}A$$

$$\Rightarrow (\mathrm{adj}(\mathrm{adj}\,A)) = (\det(A))^{n-2}A$$

《Section 4.3》

1. $P(x) = 1 + \frac{13}{6}x - \frac{1}{6}x^3$

2. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x + y + 4 = 0$

3. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \; 2x + y - 1 = 0$

4. $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 18(x^2+y^2) - 72x - 108y + 72 = 0 \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

5. $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 8 & 2 & -2 & 1 \\ 34 & 3 & 5 & 1 \\ 52 & -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 50(x^2+y^2) + 100x - 200y - 1000 = 0 \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

6. $\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -10 & 25 & 2 & -5 & 1 \\ 16 & -4 & 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y = 0$

7. $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z = 0$

8. $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 14 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2^2$

9.

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

10. 세 점 (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)을 지나는 평면의 방정식은

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

이므로 점 (x_1, y_1, z_1)이 위의 평면의 방정식을 만족하면, 즉

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

네 점 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)가 같은 평면에 있다는 것과 같은 의미이다.

11. A_{n+1}의 행렬식 n번째 행에 대하여 여인자 전개하면

$$\det(A_{n+1}) = (-1)(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 4 & \\ \vdots & & \ddots & 3 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & 4 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1)^{n-1+n-1}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 4 & \\ \vdots & & \ddots & 3 & 4 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 3a_n \ , \quad (n-1)\text{열을 전개하면}$$

$$= 3a_n + 4a_{n-1},$$

참고 : 실제로 일반항을 구하면 다음과 같다. $a_1=1, a_2=3$이고

$$a_{n+1}-3a_n-4a_{n-1}=0$$

$$\Rightarrow a_n=c_1(-1)^n+c_2 4^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=1, 1=-c_1+4c_2 \\ n=2, 3=c_1+16c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1=-\frac{1}{5}, c_2=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow a_n=-\frac{1}{5}(-1)^n+\frac{1}{5}4^n$$

12. 행렬식D_{n+1}의 n번째 행에 대하여 여인자 전개하면

$$D_{n+1}=(i)(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & i & \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & i & i \end{vmatrix}+1(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-i)(i)(-1)^{n-1+n-1}\begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & i & \\ \vdots & & \ddots & 1 & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}+D_n,\ (n-1)\text{열을 전개하면}$$

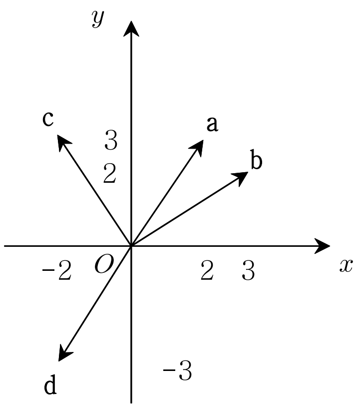
$$=D_n+D_{n-1}.$$

참고 : D_n은 피보나치수의 형태이다.

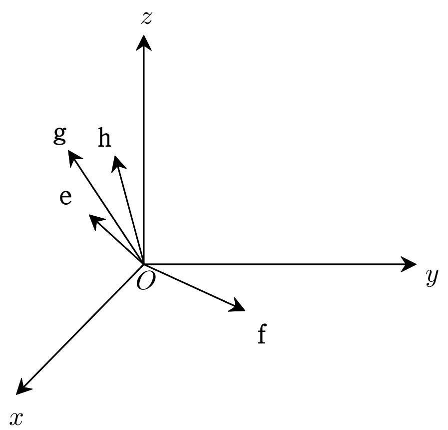
Chapter 05 연습문제 답안

《Section 5.1》

1~4.



5~8.



9. $\overrightarrow{PQ} = (-1-3,\ 2-4) = (-4,\ -2)$

10. $\overrightarrow{PQ} = (-2-3,\ -2-2,\ 1-(-1)) = (-5,\ -4,\ 2)$

11. $Q(2,\ 3)$

12. $P(-2, -2, -1)$

13. $$\begin{aligned} 2u-3v &= 2(2, 2, -1)-3(4, -2, 1) \\ &= (4, 4, -2)+(-12, 6, -3) \\ &= (-8, 10, -5) \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} (2u-w)-(3v-3u) &= 5u-3v-w \\ &= 5(2, 2, -1)-3(4, -2, 1)-(0, -2, 4) \\ &= (-2, 18, -12) \end{aligned}$$

15. $2u+3v = x-w$이므로

$$\begin{aligned} x &= 2u+3v+w \\ &= 2(2,2,-1)+3(4,-2,1)+(0,-2,4) \\ &= (16,-4,5) \end{aligned}$$

16. $u=\dfrac{a}{\|a\|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)=(\dfrac{-2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}})$

17. $u=\dfrac{b}{\|b\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2},2)=(\sqrt{\dfrac{2}{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}})$

18. $u=\dfrac{c}{\|c\|}=\dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{2},1,-1)=(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2})$

19. $u=\dfrac{d}{\|d\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)=(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$

20. (1) $a=(-2,1)=(-2,0)+(0,1)=-2e_1+e_2$

(2) $b=(\sqrt{2},2)=(\sqrt{2},0)+(0,2)=\sqrt{2}e_1+2e_2$

(3) $c=(\dfrac{1}{2},1,-1)=(\dfrac{1}{2},0,0)+(0,1,0)+(0,0,-1)=\dfrac{1}{2}e_1+e_2-e_3$

(4) $d=(1,1,-1)=(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,-1)=e_1+e_2-e_3$

21. $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}$

22. 그림에 주어진 벡터들의 합은 0이다.

23. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$의 경우는 좌표평면 $\mathbb{R}^2$의 경우와 마찬가지이므로 여기서는 $\mathbb{R}^2$의 벡터 $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1, v_2)$, $w=(w_1, w_2)$에 대하여 증명한다.

(1) $\mathrm{u}+\mathrm{v}=(u_1,\ u_2)+(v_1,\ v_2)=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)$
$=(v_1+u_1,\ v_2+u_2)$
$=(v_1,\ v_2)+(u_1,\ u_2)$
$=\mathrm{v}+\mathrm{u}$

(2) $\mathrm{u}+(\mathrm{v}+\mathrm{w})=(u_1,\ u_2)+((v_1,\ v_2)+(w_1,\ w_2))$
$=(u_1,\ u_2)+(v_1+w_1,\ v_2+w_2)$
$=(u_1+(v_1+w_1),\ u_2+(v_2+w_2))$
$=((u_1+v_1)+w_1, (u_2+v_2)+w_2)$
$=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)+(w_1,\ w_2)$
$=(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w}$

(3) $\mathrm{u}+\mathbf{0}=(u_1,\ u_2)+(0,0)$
$=(u_1,\ u_2)$
$=(0,0)+(u_1,\ u_2)$
$=\mathbf{0}+\mathrm{u}$
$=\mathrm{u}$

(4) $\mathrm{u}-\mathrm{u}=(u_1,\ u_2)-(u_1,\ u_2)$
$=(u_1,\ u_2)+(-1)(u_1,\ u_2)$
$=\mathrm{u}+(-\mathrm{u})=\mathbf{0}$

(5)$1\mathrm{u}=1(u_1,\ u_2)=(u_1,\ u_2)=\mathrm{u}$

(6) $(ck)\mathrm{u}=(ck)(u_1,\ u_2)$
$=((ck)u_1,\ (ck)u_2)$
$=(c(ku_1),\ c(ku_2))$
$=c(ku_1,\ ku_2)$
$=c(k\mathrm{u})$

마찬가지로 $(ck)\mathrm{u}=k(c\mathrm{u})$

(7) $(c+k)\mathrm{u}=(c+k)(u_1,\ u_2)$
$=((c+k)u_1,\ (c+k)u_2)$
$=(cu_1+ku_1, cu_2+ku_2)$
$=(cu_1,\ cu_2)+(ku_1,\ ku_2)$
$=c\mathrm{u}+k\mathrm{u}$

(8) $c(\mathrm{u}+\mathrm{v})=c(u_1+v_1,\ u_2+v_2)$
$=(c(u_1+v_1),\ c(u_2+v_2))$
$=(cu_1+cv_1,\ cu_2+cv_2)$
$=(cu_1,\ cu_2)+(cv_1,\ cv_2)$
$=c\mathrm{u}+c\mathrm{v}$

24. $x=\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$

25. $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

26. $z = i + 2j - 3k$

27. $w = -\sqrt{2}j + 5k$

《Section 5.2》

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -4 + 0 = -4$

2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 6 + 0 - 2 = 4$

3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 2 - 2 = 0$

4. $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 0$

5. $\cos\theta = \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

6. $\cos\theta = \dfrac{-2}{\dfrac{2\sqrt{5}}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

7. $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$

8. $\cos\theta = \dfrac{-23}{\sqrt{29}\sqrt{41}} = \dfrac{-23}{\sqrt{1189}}$

9. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 = 2^2 + 0^2 + 1^2 = 5$

10. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$

11. $(3\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (3\mathbf{v}) = 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 3 \cdot 0 = 0$

12. $3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 3 \cdot 0 = 0$

13. 내적이 0이면 직교한다. 따라서 $\mathbf{x}_1$과 수직인 벡터는 $\mathbf{x}_5$, $\mathbf{x}_7$이고, $\mathbf{x}_2$와 수직인 벡터는 $\mathbf{x}_8$, $\mathbf{x}_3$와 수직인 벡터는 $\mathbf{x}_7$, $\mathbf{x}_6$과 수직인 벡터는 $\mathbf{x}_7$이다. 특히 영벡터인 $\mathbf{x}_4$는 모든 벡터와 수직이다.

14. 서로 평행인 벡터는 한 벡터의 스칼라 배인 것이다. $\mathbf{x}_1$과 평행인 $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_6$이다. 또 영벡터는 모든 벡터와 평행이므로 $\mathbf{x}_4$는 모든 벡터와 평행이다.

15. $\cos\alpha = \frac{2}{\| \sqrt{20} \|}$, $\cos\beta = \frac{0}{\| \sqrt{20} \|} = 0$, $\cos\gamma = \frac{-4}{\| \sqrt{20} \|}$

16. $\cos\alpha = \frac{-1}{\| \sqrt{3} \|}$, $\cos\beta = \frac{-1}{\| \sqrt{3} \|}$, $\cos\gamma = \frac{-1}{\| \sqrt{3} \|}$

17. $\cos\alpha = \frac{2}{\| \sqrt{20} \|}$, $\cos\beta = \frac{-4}{\| \sqrt{20} \|}$, $\cos\gamma = \frac{0}{\| \sqrt{20} \|} = 0$

18. $\cos\alpha = \frac{2}{\| \sqrt{29} \|}$, $\cos\beta = \frac{-4}{\| \sqrt{29} \|}$, $\cos\gamma = \frac{3}{\| \sqrt{29} \|}$

19. 세 점 $P(3,1,2)$, $Q(7,0,1)$, $R(2,3,-4)$ 을 각각 시작점과 끝점으로 하는 벡터는 $\overrightarrow{PQ} = (4, -1, -1)$, $\overrightarrow{PR} = (-1, 2, -6)$이고, 두 벡터의 내적은 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$이다. 따라서 두 벡터는 수직이다. 그러므로 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다.

20.
$$
\begin{aligned}
(\mathrm{u}+\mathrm{v}) \cdot \mathrm{w} &= ((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)) \cdot (w_1, w_2, w_3) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) \\
&= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + (u_3 + v_3)w_3 \\
&= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) + (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \\
&= \mathrm{u} \cdot \mathrm{w} + \mathrm{v} \cdot \mathrm{w}
\end{aligned}
$$

21. z가 x, y와 각각 직교하므로 내적은 $\mathrm{z} \cdot \mathrm{x} = 0$, $\mathrm{z} \cdot \mathrm{y} = 0$이다. 한편

$$
\begin{aligned}
\mathrm{z} \cdot (a\mathrm{x} + b\mathrm{y}) &= a(\mathrm{z} \cdot \mathrm{x}) + b(\mathrm{z} \cdot \mathrm{y}) \\
&= a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

이므로 z는 벡터 $a\mathrm{x} + b\mathrm{y}$ $(a, b \in \mathbb{R})$와 직교한다.

22. $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$라 하면 $\mathrm{x} = x_1 \mathrm{i} + x_2 \mathrm{j} + x_3 \mathrm{k}$이고, $\mathrm{x} \cdot \mathrm{i} = x_1$, $\mathrm{x} \cdot \mathrm{j} = x_2$, $\mathrm{x} \cdot \mathrm{k} = x_3$이므로 주어진 식이 성립한다.

23. $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = \| \mathrm{u} \| \| \mathrm{v} \| \cos\theta = \cos\theta$이다. 이때 $| \mathrm{u} \cdot \mathrm{v} | = |\cos\theta| \le 1$이다. 따라서 두 단위벡터의 내적은 1보다 작거나 같다.

《Section 5.3》

1. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-2\mathbf{i}-9\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

2. $\mathbf{y}\times\mathbf{x}=-\mathbf{x}\times\mathbf{y}=2\mathbf{i}+9\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

3. $\mathbf{y}\times\mathbf{z}=-8\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$이므로 $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z})=6\mathbf{i}+9\mathbf{j}+13\mathbf{k}$

4. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=-2\mathbf{i}-9\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ 이므로 $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}=-12\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}$

5. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\mathbf{i}-4\mathbf{j}-7\mathbf{k}$

6. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=-6\mathbf{i}+6\mathbf{j}-6\mathbf{k}$

7. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=-18\mathbf{i}-36\mathbf{j}+18\mathbf{k}$

8. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=-2\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

9. $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=\|-7\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}\|=\sqrt{59}$

10. $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=\|13\mathbf{i}+\mathbf{j}-8\mathbf{k}\|=\sqrt{234}$

11. $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=\|\mathbf{0}\|=0$

12. $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=\|-6\mathbf{i}+4\mathbf{j}+7\mathbf{k}\|=\sqrt{101}$

13. $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\|=\frac{1}{2}\|-11\mathbf{i}-23\mathbf{j}+7\mathbf{k}\|=\frac{\sqrt{699}}{2}$

14. $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\|=\frac{1}{2}\|4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}\|=\frac{\sqrt{56}}{2}$

15. $\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right|=8$

16. $\mathrm{x}\times\mathrm{y}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ 이고, 행렬식은 두 행을 교환하면 부호가 바뀌므로 $\mathrm{x}\times\mathrm{y}=-\mathrm{y}\times\mathrm{x}$ 이다.

17. $$\mathrm{x}\times(\mathrm{y}+\mathrm{z})=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$
따라서 $\mathrm{x}\times(\mathrm{y}+\mathrm{z})=(\mathrm{x}\times\mathrm{y})+(\mathrm{x}\times\mathrm{z})$

18. $$(\mathrm{x}+\mathrm{y})\times\mathrm{z}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$
따라서 $(\mathrm{x}+\mathrm{y})\times\mathrm{z}=(\mathrm{x}\times\mathrm{z})+(\mathrm{y}\times\mathrm{z})$

19. 행렬식의 k배는 한 행에 k배 한 행렬의 행렬식과 같으므로
$k(\mathrm{x}\times\mathrm{y})=(k\mathrm{x})\times\mathrm{y}=\mathrm{x}\times(k\mathrm{y})$ 이 성립한다.

20. 한 행이 모두 0인 행렬의 행렬식은 0이다. 따라서 $\mathrm{x}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}\times\mathrm{x}=\mathbf{0}$

21. 두 행이 같은 행렬의 행렬식은 0이므로 $\mathrm{x}\times\mathrm{x}=\mathbf{0}$

22. x와 y가 평행이라면 적당한 스칼라 k에 대하여 $\mathrm{x}=k\mathrm{y}$이다. 즉, x의 각 성분은 y의 각 성분에 k배한 것이다. 따라서 행렬식의 성질에 의하여 $\mathrm{x}=k\mathrm{y}$일 필요충분조건은 $\mathrm{x}\times\mathrm{y}=\mathbf{0}$ 이다.

23. 외적의 성질에 의하여 $(\mathrm{x}\times\mathrm{y})\times\mathrm{z}=(\mathrm{x}\cdot\mathrm{z})\mathrm{y}-(\mathrm{y}\cdot\mathrm{z})\mathrm{x}$이므로
$(\mathrm{x}\times\mathrm{y})\times\mathrm{z}+(\mathrm{y}\times\mathrm{z})\times\mathrm{x}+(\mathrm{z}\times\mathrm{x})\times\mathrm{y}$에서
$(\mathrm{x}\times\mathrm{y})\times\mathrm{z}=(\mathrm{x}\cdot\mathrm{z})\mathrm{y}-(\mathrm{y}\cdot\mathrm{z})\mathrm{x}$, $(\mathrm{y}\times\mathrm{z})\times\mathrm{x}=(\mathrm{y}\cdot\mathrm{x})\mathrm{z}-(\mathrm{z}\cdot\mathrm{x})\mathrm{y}$,
$(\mathrm{z}\times\mathrm{x})\times\mathrm{y}=(\mathrm{z}\cdot\mathrm{y})\mathrm{x}-(\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})\mathrm{z}$

한편 내적은 교환법칙이 성립하므로

$(\mathrm{x}\times\mathrm{y})\times\mathrm{z}+(\mathrm{y}\times\mathrm{z})\times\mathrm{x}+(\mathrm{z}\times\mathrm{x})\times\mathrm{y}$
$=(\mathrm{x}\cdot\mathrm{z})\mathrm{y}-(\mathrm{y}\cdot\mathrm{z})\mathrm{x}+(\mathrm{y}\cdot\mathrm{x})\mathrm{z}-(\mathrm{z}\cdot\mathrm{x})\mathrm{y}+(\mathrm{z}\cdot\mathrm{y})\mathrm{x}-(\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})\mathrm{z}=\mathbf{0}$

《Section 5.4》

1. $\dfrac{x}{\|x\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,\ 0,\ 1,\ -1)$

2. $\dfrac{y}{\|y\|}=\dfrac{1}{\sqrt{163}}(9,\ -3,\ -6,\ 1,\ -6)$

3. $\dfrac{z}{\|z\|}=\dfrac{1}{\sqrt{55}}(1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5)$

4. $\dfrac{w}{\|w\|}=\dfrac{1}{\sqrt{11}}(-2,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1,\ 2)$

5. $x \cdot y = 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 4$

6. $x \cdot y = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 4$

7. $x \cdot y = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \dfrac{1}{2} \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 0$

8. $x \cdot y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \dfrac{5}{2}$

9. (1) $x \cdot y = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 1$이고,

$\|x\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$,

$\|y\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$이다.

따라서 $1 \le \sqrt{13} \cdot 2$이므로 $|x \cdot y| \le \|x\|\,\|y\|$ 이 성립한다.

(2) $x + y = (3, 0, -1, -3)$이므로 $\|x+y\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$ 이다.

따라서 $\sqrt{19} \le \sqrt{13} + 2$이므로 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ 이 성립한다.

10. (1) $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathrm{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$에 대하여 행렬의 덧셈에 대한 교환법칙을 이용하면

$$\begin{aligned} \mathrm{x}+\mathrm{y} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{y}+\mathrm{x} \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$에 대하여 행렬의 결합법칙을 이용하면

$$\begin{aligned} (\mathrm{x}+\mathrm{y})+\mathrm{z} &= \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathrm{y}+(\mathrm{x}+\mathrm{z}) \end{aligned}$$

(3) $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$에 대하여

$$\begin{aligned} \mathrm{x}+0 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= 0+\mathrm{x}=\mathrm{x} \end{aligned}$$

(4) $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$에 대하여 $-\mathrm{x}=\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{x}+(-\mathrm{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= (-\mathrm{x})+\mathrm{x}=0 \end{aligned}$$

11. (1) $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathrm{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$에 대하여

$$\begin{aligned} \mathrm{x}\cdot\mathrm{y} &= x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\cdots+x_n\cdot y_n \\ &= y_1\cdot x_1+y_2\cdot x_2+\cdots+y_n\cdot x_n \\ &= \mathrm{y}\cdot\mathrm{x} \end{aligned}$$

(2) $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$에 대하여 $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$

$$= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + \cdots + (x_n+y_n)z_n$$
$$= (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots\ x_nz_n) + (y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots\ y_nz_n)$$
$$= \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$$

(3) $k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = k(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)$
$$= (kx_1)y_1 + (kx_2)y_2 + \cdots + (kx_n)y_n = (k\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$$
$$= x_1(ky_1) + x_2(ky_2) + \cdots + x_n(ky_n) = \mathbf{x} \cdot (k\mathbf{y})$$

(4) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \geq 0$

12. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = |\,\|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\| \cos\theta| = \|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\| |\cos\theta|$이므로 코시-슈바르츠 부등식

$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$에서 등호가 성립할 필요충분조건은 $|\cos\theta| = 1$, 즉 두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 사이의 각 $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$이다. 따라서 두 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$는 방향이 같거나 반대인 평행인 벡터이다.

13. $\frac{1}{4}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \frac{1}{4}((\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))$
$$= \frac{1}{4}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{y})$$
$$= \frac{1}{4}(4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$$
$$= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

14. $\mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}) = (A\mathbf{y})^T\mathbf{x}$
$$= (\mathbf{y}^T A^T)\mathbf{x}$$
$$= \mathbf{y}^T(A^T\mathbf{x})$$
$$= (A^T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$$

15. $a = 1, 5$

《Section 5.5》

1. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-3}{-2}$

2. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$

3. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1},\ z=-2$

4. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{5}$

5. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-7}$

6. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-7}{-7}=\dfrac{z+2}{3}$

7. a$=(5,\ -3,\ 2)$

8. a$=(-2,\ 3,\ 5)$

9. $2x-3y+z+6=0$

10. $y=0$

11. $x+y+z-2=0$

12. $7x+39y+17z-195=0$

13. n$=(1,\ -3,\ 5)$

14. n$=(3,\ 5,\ -6)$

15. $\dfrac{13x-9}{7}=\dfrac{13y-20}{-22}=\dfrac{z}{1}$

16. $(x,\ y,\ z)=(\frac{95}{39},\ \frac{131}{39},\ -\frac{185}{39})$

17. $(x,\ y,\ z)=(\frac{142}{21},\ \frac{22}{21},\ \frac{31}{21})$

18. $D=\frac{|2\cdot 1+1\cdot 0+(-3)\cdot(-2)+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{9}{\sqrt{14}}$

19. $D=\frac{|(-1)\cdot 1+(-6)\cdot 0+3\cdot(-2)+5|}{\sqrt{(-1)^2+(-6)^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{46}}$ $\quad -x-6y+3z=-5$

20. 세 점이 동일한 직선 위에 있다면 $\overrightarrow{PQ}=(0,\ 4,\ 5)$와 $\overrightarrow{PR}=(6,\ 12,\ 14)$은 평행해야 한다. 즉 $\overrightarrow{PQ}=t\overrightarrow{PR}$인 실수 t가 존재한다. 그러나 $(0,4,5)=t(6,12,14)$인 t는 없다. 따라서 세 점은 동일한 직선 위에 있지 않다.

21. $2x-3y+5z-23=0$

22. $2x+y+z-3=0$

Chapter 06 연습문제 답안

《Section 6.1》

1. $1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \neq 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 이므로 벡터공간이 아니다.

2. $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$, $k(x,0)=(kx,0)$는 $(x,0)$꼴이므로 벡터공간이다.

3. $-2(1,2)=(-2,-4)$이므로 스칼라곱에 닫혀 있지 않다. 벡터공간이 아니다.

4. $2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 이므로 벡터공간이 아니다.

5. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 이므로 벡터공간이 아니다.

6. 부분공간임

7. 원점을 지나지 않으므로 부분공간이 아님

8. 부분공간임

9. 원점을 지나지 않으므로 부분공간이 아님

10. 부분공간임

11. 부분공간임

12. $\frac{1}{3}(-1-t-t^2-t^3)$이 주어진 집합에 포함되지 않으므로 부분공간이 아님

13. $k(0,x_2,\cdots,x_n)=(0,kx_2,\ \cdots,kx_n)\in W$ 이므로 부분공간이다.

14. $-3(1,2,3,4)=(-3,-6,-9,-12)\notin W$이므로 부분공간이 아니다.

15. $(0,-1,x_3,\ \cdots,x_n)+(1,0,x_3,\ \cdots,x_n)=(1,-1,x_3,\ \cdots,x_n)\notin W$이므로 부분공간이 아니다.

16. $(\because \sum_{i=1}^{n} kx_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i = 0)$이므로 부분공간이다.

17. $3(1,1,1,1)=(3,3,3,3)\notin W$이므로 부분공간이 아니다.

18. $A(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2)=A\mathrm{x}_1+A\mathrm{x}_2=\mathrm{b}+\mathrm{b}=2\mathrm{b}\notin W$이므로 부분공간이 아니다.

19. $a\mathrm{x}=b\mathrm{x} \Rightarrow a\mathrm{x}-b\mathrm{x}=\mathbf{0} \Rightarrow (a-b)\mathrm{x}=\mathbf{0} \Rightarrow a=b$ $(\mathrm{x}\neq\mathbf{0}$ 이므로)

20. $k\mathrm{x}=\mathrm{x} \Rightarrow (k-1)\mathrm{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{x}\neq\mathbf{0}$ 일 때는 $k=1$ 또는 $k\neq 1$일 때는 $\mathrm{x}=\mathbf{0}$

21. (1) $\mathrm{x}=(x_1,\ x_2)$, $\mathrm{y}=(y_1,\ y_2)\in L_0$ 이면 $3x_1-x_2=0$, $3y_1-y_2=0$이고 $\mathrm{x}+\mathrm{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$이다. 따라서 $3(x_1+y_1)-(x_2+y_2)=(3x_1-x_2)+(3y_1-y_2)=0$ 이므로 $\mathrm{x}+\mathrm{y}\in L_0$이다.

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{x}+(\mathrm{y}+\mathrm{z}) &= (x_1,\ x_2)+((y_1,\ y_2)+(z_1,\ z_2))\\ &= (x_1,\ x_2)+(y_1+z_1,\ y_2+z_2)\\ &= (x_1+(y_1+z_1),\ x_2+(y_2+z_2))\\ &= (x_1+y_1+z_1,\ x_2+y_2+z_2)\\ &= ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2)\\ &= (x_1+y_1,\ x_2+y_2)+(z_1,\ z_2)\\ &= (\mathrm{x}+\mathrm{v})+\mathrm{w}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\mathrm{x}+\mathbf{0} &= (x_1,\ x_2)+(0,0)\\ &= (x_1,\ x_2)\\ &= (0,0)+(x_1,\ x_2)\\ &= \mathbf{0}+\mathrm{x}\\ &= \mathrm{x}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\mathrm{x}-\mathrm{x} &= (x_1,\ x_2)-(x_1,\ x_2)\\ &= (x_1,\ x_2)+(-1)(x_1,\ x_2)\\ &= \mathrm{x}+(-\mathrm{x})=\mathbf{0}\end{aligned}$$

(5)$1\mathbf{x} = 1(x_1,\ x_2) = (x_1,\ x_2) = \mathbf{x}$

$$\begin{aligned}(6)\ \ (ck)\mathbf{x} &= (ck)(x_1,\ x_2)\\ &= ((ck)x_1,\ (ck)x_2)\\ &= (c(kx_1),\ c(kx_2))\\ &= c(kx_1,\ kx_2)\\ &= c(k\mathbf{x})\end{aligned}$$

마찬가지로 $(ck)\mathbf{x} = k(c\mathbf{x})$

$$\begin{aligned}(7)\ \ (c+k)\mathbf{x} &= (c+k)(x_1,\ x_2)\\ &= ((c+k)x_1,\ (c+k)x_2)\\ &= (cx_1 + kx_1, cx_2 + kx_2)\\ &= (cx_1,\ cx_2) + (kx_1,\ kx_2)\\ &= c\mathbf{x} + k\mathbf{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8)\ \ c(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= c(x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)\\ &= (c(x_1 + y_1),\ c(x_2 + y_2))\\ &= (cx_1 + cy_1,\ cx_2 + cy_2)\\ &= (cx_1,\ cx_2) + (cy_1,\ cy_2)\\ &= c\mathbf{x} + c\mathbf{y}\end{aligned}$$

22. [예제 6-1]의 집합 L_1의 경우를 참고하라.

23. W_1, W_2가 벡터공간 $\mathbb{R}^n$의 두 부분공간이라 하자.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \in W_1 \cap W_2$ 을 보이면 된다.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W_2$

$\Rightarrow c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \in W_1,\ c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \in W_2$ (W_1, W_2는 $\mathbb{R}^n$의 부분공간)

$\Rightarrow c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \in W_1 \cap W_2$

$W_1 \cup W_2$ 는 $\mathbb{R}^n$의 부분공간이 아니다.

반례 : $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x - y = 0 \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x - y = 0 \right\}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \not\in W_1 \cup W_2$이므로 $\mathbb{R}^2$의 부분공간이 아니다.

24. S가 $\mathbb{R}^n$의 부분공간이므로 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S \Rightarrow c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \in S$이다.

$$A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 \in A(S) \Rightarrow c_1A\mathbf{x}_1 + c_2A\mathbf{x}_2 = A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) \in A(S)$$

《Section 6.2》

1. $(2,1,-3) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(0,1,-1) \Rightarrow a = 4,\ b = -2,\ c = 3$

2. $(2,1,-3) = a(-3,1,2) + b(1,0,-1) \Rightarrow a = 1,\ b = 5$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$이므로 일차독립이다.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$이므로 일차독립이다.

5. $k = 1/2,\ -1$

6. $1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + 1(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) - 1(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3) = \mathbf{0}$ 이므로 일차종속이다.

7. $c_1\mathbf{x}_1 + c_2(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + c_3(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) = \mathbf{0} \Rightarrow (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{x}_1 + (c_2 + c_3)\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$

   $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_3$가 일차독립이므로 $c_1 + c_2 + c_3 = 0,\ c_2 + c_3 = 0,\ c_3 = 0$

   $\therefore\ c_1 = c_2 = c_3 = 0$

8. $\det(T) = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn} \neq 0$이므로 일차독립이다.

9. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ 을 $\mathbb{R}^n$의 벡터집합이라 하자.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1n}) \\ \mathbf{v}_2 &= (v_{21}, v_{22}, \cdots, v_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_m &= (v_{m1}, v_{m2}, \cdots, v_{mn}) \end{aligned}$$

   이라 하고,

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} c_1v_{11} + c_2v_{21} + \cdots + c_mv_{m1} = 0 \\ c_1v_{12} + c_2v_{22} + \cdots + c_mv_{m2} = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ c_1v_{1n} + c_2v_{2n} + \cdots + c_mv_{mn} = 0 \end{array}$$

   이므로 m개 미지수 $c_1, c_2, \cdots, c_m$를 갖는 n개의 방정식으로 이루어진 동차연립일차방정식이다. $m > n$이므로 즉, 미지수 개수가 방정식 개수가 많으므로 이 동차연립방정식은

자명하지 않은 해를 갖는다. 따라서 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_m\}$ 은 일차종속이다.

10. $a_1(A\mathbf{x}_1)+a_2(A\mathbf{x}_2)+\cdots+a_n(A\mathbf{x}_n)=\mathbf{0}$ 일 때 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$임을 보이면 일차독립이다.

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=a_1(A\mathbf{x}_1)+a_2(A\mathbf{x}_2)+\cdots+a_n(A\mathbf{x}_n)\\&=A(a_1\mathbf{x}_1)+A(a_2\mathbf{x}_2)+\cdots+A(a_n\mathbf{x}_n)\\&=A(a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+\cdots+a_n\mathbf{x}_n)\end{aligned}$$

행렬 A가 가역행렬이므로 양변에 A^{-1}을 곱하면

$$A^{-1}\mathbf{0}=A^{-1}A(a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+\cdots+a_n\mathbf{x}_n)=a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+\cdots+a_n\mathbf{x}_n$$

$$\Rightarrow \mathbf{0}=a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+\cdots+a_n\mathbf{x}_n$$

그런데 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n\}$ 이 $\mathbb{R}^n$에서 일차독립이므로 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$이 되어 $\{A\mathbf{x}_1,A\mathbf{x}_2,\dots,A\mathbf{x}_n\}$ 도 일차독립이다.

11. 만일 $\mathbf{x}_1=\mathbf{0}$이라 하면 임의의 스칼라 $c_1(\neq 0)$에 대하여

$c_1\mathbf{0}+0\mathbf{x}_2+\cdots+0\mathbf{x}_k=\mathbf{0}$이므로 $S=\{\mathbf{0},\ \mathbf{x}_2,\ \dots,\ \mathbf{x}_k\}$는 일차종속이다.

12. S의 부분집합 S'을 $S'=\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \dots,\ \mathbf{x}_h\}$, $(2\le h\le k)$라 하고 S'이 일차종속이라 하면 $c_i\neq 0(1\le i\le h)$에 대하여 $c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_h\mathbf{x}_h=\mathbf{0}$

을 만족한다. 따라서 $c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_h\mathbf{x}_h+0\mathbf{x}_{h+1}+0\mathbf{x}_{h+2}+\cdots+0\mathbf{x}_k=\mathbf{0}$ 이므로 S는 일차종속이다. 또한 이 명제의 대우도 참이므로 S가 일차독립이므로 S'도 일차독립이다.

《Section 6.3 연습문제》

1. $\begin{vmatrix}3&4&5\\2&1&2\\-4&-2&-3\end{vmatrix}=-5\neq 0$이므로 일차독립이고 기저이다.

2. $\begin{vmatrix}3&8&2\\4&7&-1\\-5&-2&8\end{vmatrix}=0$이므로 일차종속이다. 기저가 아님.

3. 기저가 되기 위해서는 적어도 벡터가 세 개가 필요하므로 S는 기저가 될 수 없다.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$이므로 S는 일차독립이므로 S는 기저이다.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$이므로 S는 일차독립이므로 S는 기저이다.

6. S가 일차종속이므로 기저가 될 수 없다.

7. S는 4개의 벡터를 가지므로 일차종속이다. 그래서 기저가 아님.
$(1,2,3) = (1,0,0) + (0,2,0) + (0,0,3)$

8. $(x,y,z) = (s,t,-s-t) = s(1,0,-1) + t(0,1,-1)$이므로 기저는 $\{(1,0,-1), t(0,1,-1)\}$이고 $\dim W = 2$이다.

9. $(x,y,z) = (2s,t,s) = s(2,0,1) + t(0,1,0)$이므로 기저는 $\{(2,0,1), t(0,1,0)\}$이고 $\dim W = 2$이다.

10. $(x,y,z) = (t,2t,3t) = t(1,2,3)$이므로 기저는 $\{(1,2,3)\}$이고 $\dim W = 1$이다.

11. $(x,y,z) = (t,-2t,4t) = t(1,-2,4)$이므로 기저는 $\{(1,-2,4)\}$이고 $\dim W = 1$이다.

12. $\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a^3 - a = a(a-1)(a+1) \neq 0 \quad a \neq -1,0,1$인 모든 실수값을 선택하면 된다.

13. 두 벡터 (1,0,1,0)과 (0,1,-1,0)는 일차독립이므로 표준단위벡터 $(1,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$를 추가하면 $\mathbb{R}^4$의 기저가 된다.

14. $\{A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n\}$가 일차독립임을 보이면 $\mathbb{R}^n$의 기저이다.
$a_1(A\mathbf{x}_1) + a_2(A\mathbf{x}_2) + \cdots + a_n(A\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$ 일 때 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$임을 보이면 일차독립이다.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= a_1(A\mathbf{x}_1) + a_2(A\mathbf{x}_2) + \cdots + a_n(A\mathbf{x}_n) \\ &= A(a_1\mathbf{x}_1) + A(a_2\mathbf{x}_2) + \cdots + A(a_n\mathbf{x}_n) \\ &= A(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

행렬 A가 가역행렬이므로 양변에 A^{-1}을 곱하면

$$A^{-1}0 = A^{-1}A(a_1\mathrm{x}_1 + a_2\mathrm{x}_2 + \cdots + a_n\mathrm{x}_n) = a_1\mathrm{x}_1 + a_2\mathrm{x}_2 + \cdots + a_n\mathrm{x}_n$$
$$\Rightarrow 0 = a_1\mathrm{x}_1 + a_2\mathrm{x}_2 + \cdots + a_n\mathrm{x}_n$$

그런데 $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n\}$ 이 $\mathbb{R}^n$에서 일차독립이므로 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$이 되어 $\{A\mathrm{x}_1, A\mathrm{x}_2, \ldots, A\mathrm{x}_n\}$ 도 일차독립이다.

15. $\mathbb{R}^n$의 모든 부분공간은 항상 벡터공간이므로 항상 기저를 갖는다.

16. $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3\}$ 가 일차독립이면 $\mathbb{R}^3$의 기저이다.

$$a\mathrm{v}_1 + b(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) + c(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3) = 0$$
$$\Rightarrow (a+b+c)\mathrm{v}_1 + (b+c)\mathrm{v}_2 + c\mathrm{v}_3 = 0, \ \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$$

가 기저이므로 $a+b+c=0$, $b+c=0$, $c=0$, $a=b=c=0$이므로 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3\}$ 가 일차독립이다.

《Section 6.4》

1. 행공간의 기저는 $\{(1,0),(0,1)\}$이므로 차원은 2이다.

2. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$이므로 차원은 3이다.

3. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0,2),(0,1,0,20),(0,0,1,6)\}$이므로 차원은 3이다.

4. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$이므로 차원은 4이다.

5. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0,1,2),(0,1,0,-1,-1),(0,0,1,-1,-2)\}$이므로 차원은 3이다.

6. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,-1),(0,0,0,1,0)\}$이므로 차원은 4이다.

7. 행공간의 기저 $\{(1,0,1),(0,0,1)\}$, 열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

8. 행공간의 기저 $\{(1,0,1),(0,1,2),(0,0,1)\}$, 열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$

9. 행공간의 기저 $\{(1,3,2,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$, 열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

10. 행공간의 기저 $\{(1,2,3,4),(0,1,3,0),(0,0,1,2),(0,0,0,1)\}$,

    열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\0\\2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

11. $(x_1,x_2,x_3)=(3t,-2t,t)$이므로 해공간의 기저는 $(3,-2,1)$이고 차원은 1이다.

12. $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-3t_1+2t_2,t_1-2t_2,t_1,t_2)=t_1(-3,1,1,0)+t_2(2,-2,0,1)$이므로 해공간의 기저는 $(-3,1,1,0),(2,-2,0,1)$이고 차원은 2이다.

13. $\text{rank}(A)=3$이므로 해공간의 기저는 ϕ이고 $\text{nullity}(A)$은 0이다.

14. $\text{rank}(A)=3$이므로 해공간의 기저는 ϕ이고 $\text{nullity}(A)$은 0이다.

15. $\text{rank}(A)=2$이므로 해공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-4\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$이고 $\text{nullity}(A)$은 2이다.

16. $\text{rank}(A)=3$이므로 해공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$이고 $\text{nullity}(A)$은 2이다.

17. $k=4$

18. $A=\begin{bmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{bmatrix}$는 $\text{rank}(A)=2$이다.

$AA^T=\begin{bmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\1&1&2\\-4&0&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27&-9&54\\-9&11&-18\\54&-18&108\end{bmatrix}$는 $\text{rank}(AA^T)=2$이다.

$A^TA=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\1&1&2\\-4&0&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&18&4&-20\\18&54&12&-60\\4&12&6&-20\\-20&-60&-20&80\end{bmatrix}$는 $\text{rank}(A^TA)=2$이다.

19. $x=2, y=1$

20. (1) $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$의 계수는 2이고 퇴화차수는 1이다.

(2) $A=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$의 계수는 2이고 퇴화차수는 2이다.

(3) 계수는 2이고 퇴화차수는 $n-2$이다.

21. $S=\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_k\}$은 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$의 해집합의 부분집합이면 모든 $i=1,2,\cdots,k$에 대하여 $A\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$을 만족한다.

$\langle S\rangle=\{c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_k\mathbf{x}_k \mid c_i\in\mathbb{R}\}$이므로

$A(c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_k\mathbf{x}_k)=c_1A\mathbf{x}_1+c_2A\mathbf{x}_2+\cdots+c_kA\mathbf{x}_k=c_1\mathbf{0}+c_2\mathbf{0}+\cdots+c_2\mathbf{0}=\mathbf{0}$이다.

$\langle S\rangle=\{c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_k\mathbf{x}_k \mid c_i\in\mathbb{R}\}$속하는 모든 벡터는 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$의 해이다.

22. 동차연립일차방정식 $A\mathrm{x}=0$ 의 계수행렬 A 가 성분이 모두 0인 열을 j번째 열이라면 $A\mathrm{x}=0$ 의 해공간 벡터 x의 j번째 성분 x_j는 임의의 실수 값이므로 $A\mathrm{x}=0$ 는 자명하지 않은 해를 갖는다.

23. $A\mathrm{x}=0$가 자명하지 않은 해를 갖는다면 역행렬을 갖지 않으므로 $\mathrm{rank}(A)=1$ 또는 2 이므로 rank-nullity정리에 의하여 nullity(A)=1 또는 2이다.

24. (1)⇒(2) : rank-nullity정리에 의하여 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{nullity}(A)=n$이므로 $\mathrm{nullity}(A)=0$이다.

(2)⇒(6) $\mathrm{nullity}(A)=0$이면 rank-nullity정리에 의하여 $\mathrm{rank}(A)=n$이다. 그러면 행렬 A의 RREF는 I_n이므로 A는 I_n과 행동치이다.

(6)⇒(7) A와 I_n가 행동치이므로 다음을 만족하는 기본행렬 $E_1, E_2, \cdots, E_k$가 존재하면

$$E_k \cdots E_2E_1A = I_n.$$

따라서,

$$\det(E_k \cdots E_2E_1A) = \det(E_k)\cdots \det(E_1)\det(A) = \det(I_n) \neq 0.$$

$$\therefore \det(A) \neq 0$$

A는 가역이다.

(7)⇒(8) : A는 역행렬이 존재하고 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}\,A$ 이므로 $|A|\neq 0$ 이다.

(8)⇒(7) : $|A|\neq 0$ 이고 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}\,A$ 이므로 A는 역행렬이 존재한다.

(7)⇒(5) : 행렬 A가 가역이면 A의 역행렬 A^{-1}가 유일하게 존재하므로

$$A^{-1}(A\mathrm{x}) = A^{-1}\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b}$$

이다. 즉, 연립일차방정식 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$가 유일한 해를 $\mathrm{x}=A^{-1}\mathrm{b}$ 갖는다.

(5)⇒(4) : $\mathrm{b}=0$ 이면 $A^{-1}(A\mathrm{x})=A^{-1}0 \Rightarrow \mathrm{x}=A^{-1}0 \Rightarrow \mathrm{x}=0$.

(4)⇒(3) : $A\mathrm{x}=0$은 자명한 해 $\mathrm{x}=0$만을 갖으면 행렬 A는 역행렬이 존재하므로 $\det(A)\neq 0$이므로 [정리 6-2]에 의하여 A의 모든 행(열) 벡터는 $\mathbb{R}^n$에서 일차독립이다.

(3)⇒(1) : A의 모든 행(열) 벡터는 $\mathbb{R}^n$에서 일차독립이면 [정리 6-2]에 의하여 $\det(A)\neq 0$이다. 그러면 행렬 A의 행공간의 차원은 n이므로 $\mathrm{rank}(A)=n$

《Section 6.5》

1. $(3,-2)=a(1,0)+b(0,1) \Rightarrow [\mathrm{x}]_B=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

2. $(-1,3,2)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1) \Rightarrow [\mathrm{x}]_B=\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}$

3. $(-2,3)=a(-1,1)+b(1,-2) \Rightarrow [\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

4. $(2,-1,3)=a(1,-2,1)+b(-1,0,1)+c(0,1,0) \Rightarrow [\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\3\\\frac{7}{2}\end{bmatrix}$

5. $(2,4)=a(1,-1)+b(1,1) \Rightarrow [\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

6. $(2,-3,-1)=a(1,-1,0)+b(1,1,1)+c(1,1,-2) \Rightarrow [\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$

7. $(3,7)=a(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})+b(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow [\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}\frac{4}{\sqrt{2}}\\\frac{10}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

8. $(-1,0,2)=a(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})+b(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})+c(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}) \Rightarrow [\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$

9. $(5,-3)=a(2,1)+b(3,-4) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

   $(3,-5)=a(2,1)+b(3,-4) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}\\\frac{13}{11}\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}\\\frac{13}{11}\end{bmatrix}$

10. $P=[I]_{T,S}=[S]^{-1}[T]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}$

11. $(5,-3)=a(1,0)+b(0,1) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$

$(3,-5)=a(1,0)+b(0,1) \Rightarrow [\mathrm{y}]_T=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$

12. $Q=P^{-1}=\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}^{-1}=-\dfrac{1}{11}\begin{bmatrix}-4&-3\\-1&2\end{bmatrix}$

13. $(5,4)=a(1,1)+b(2,3) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$

$(1,5)=a(1,1)+b(2,3) \Rightarrow [\mathrm{y}]_T=\begin{bmatrix}-7\\4\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$

14. $P=[I]_{T,S}=[S]^{-1}[T]=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&2\end{bmatrix}$

15. $(5,4)=a(0,1)+b(1,2) \Rightarrow [\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}-6\\5\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\5\end{bmatrix}$

$(1,5)=a(0,1)+b(1,2) \Rightarrow [\mathrm{y}]_S=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$

16. $Q=[I]_{S,T}=[T]^{-1}[S]=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\1&1\end{bmatrix}$

17. $P_{S_1\to S_3}=[S_3]^{-1}[S_1]=[S_3]^{-1}[S_2]\,[S_2]^{-1}[S_1]=P_{S_2\to S_3}P_{S_1\to S_2}=\begin{bmatrix}7&2\\4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31&11\\7&2\end{bmatrix}$

18. $S=\{(1,1,0),\ (1,0,2),\ (0,2,1)\}$

19. $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&-1&2\\-2&2&1\end{bmatrix}$ 이므로

$S=\left\{\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right),\ \left(\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right),\ \left(-\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)\right\}$이다.

20. $S=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\ldots,\mathrm{v}_n\}$가 n차원 벡터공간 $\mathbb{R}^n$의 기저라 하면 $\mathbb{R}^n$의 벡터 x_i는

$\mathrm{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{v}_i$, $(a_{ij}\in\mathbb{R})$로 유일하게 표현되므로 $[\mathrm{x}_i]_s=\begin{bmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{bmatrix}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

따라서 $[c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_n\mathbf{x}_n]_S=\begin{bmatrix} c_1a_{11}+\cdots+c_na_{n1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ c_1a_{1n}+\cdots+c_na_{nn}\end{bmatrix}_S=c_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n}\end{bmatrix}_S+\cdots+c_n\begin{bmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn}\end{bmatrix}_S$

$$=c_1[\mathbf{x}_1]_S+c_2[\mathbf{x}_2]_S+\cdots+c_n[\mathbf{x}_n]_S$$

21. $\mathbf{x}=\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{y}=a_1\mathbf{x}_1+\cdots+a_n\mathbf{x}_n \Leftrightarrow [\mathbf{x}]_S=[\mathbf{y}]_S=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{bmatrix}$

《Section 6.6》

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \times (-2) + (-3) \times 2 + 4 \times 2 = 0$이므로 두 벡터는 직교이다.

2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times (-2) + (-1) \times 1 = -4 \neq 0$이므로 두 벡터는 직교가 아니다.

3. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \times 4 + (-2) \times 2 + 3 \times (-1) + 4 \times 1 = 1 \neq 0$이므로 두 벡터는 직교가 아니다.

4. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$이므로 두 벡터는 직교이다.

5. $(-2,1) \cdot (a,b) = 0 \Rightarrow b = 2a$ 이므로 수직인 단위벡터는 $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2)$이다.

6. 각 서로 다른 벡터의 내적을 구하면 0이고 자기 자신을 내적을 구하면 1이므로 정규직교집합이다.

7. 각 서로 다른 벡터의 내적을 구하면 0이고 자기 자신을 내적을 구하면 1이므로 정규직교집합이다.

8. $a = b = \pm \frac{1}{2}$

9. $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) + 0 \times 2 + 2 \times 0 = 0$,
   $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_3 = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0 = 0$,
   $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = (-1) \times 1 + (-1) \times 1 + 2 \times 1 + 0 \times 0 = 0$
   이므로 주어진 세 개의 벡터가 서로 수직이다.

10. $\mathbf{x}_4 = (-t,t,0,t) = t(-1,1,0,1)$이다.

11. 10번에서 구한 벡터는 서로 수직이므로 각 벡터의 크기만 나누어 주면 정규직교벡터가 된다.

$$\left\{ \mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}, \mathbf{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}, \mathbf{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{y}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix} \right\}.$$

12. $\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$

13. $y_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{-3}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$

14. Gram-Schmidt 정규직교화과정으로부터 y_1, y_2, y_3 는 각각 다음과 같다.

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = x_2 - \mathrm{proj}_{W_1} x_2 = x_2 - (x_2 \cdot y_1) y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

따라서

$$y_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$z_3 = x_3 - \mathrm{proj}_{W_2} x_3 = x_3 - (x_3 \cdot y_1) y_1 - (x_3 \cdot y_2) y_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$y_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

따라서

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

15. Gram-Schmidt 정규직교화과정으로부터 y_1, y_2, y_3 는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_1)\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

따라서

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{x}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{y}_1)\mathbf{y}_1 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{y}_2)\mathbf{y}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} - \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

따라서

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

16. $x+y+z=0$을 만족하는 기저를 다음과 같다.

$$\mathbf{x}_1 = (-1,1,0),\ \mathbf{x}_2 = (-1,0,1)$$

Gram-Schmidt 정규직교화과정으로부터 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = x_2 - \mathrm{proj}_{W_1} x_2 = x_2 - (x_2 \cdot y_1) y_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

따라서

$$y_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

17. $x = (x \cdot u_1)u_1 + (x \cdot u_2)u_2 + \cdots + (x \cdot u_n)u_n$,

$y = (y \cdot u_1)u_1 + (y \cdot u_2)u_2 + \cdots + (y \cdot u_n)u_n$로 표현할 수 있으므로

$x \cdot y = \{(x \cdot u_1)u_1 + (x \cdot u_2)u_2 + \cdots + (x \cdot u_n)u_n\} \cdot \{(y \cdot u_1)u_1 + (y \cdot u_2)u_2 + \cdots + (y \cdot u_n)u_n\}$

$= \sum_{i=1}^{n} (x \cdot u_i)(u_i \cdot y)$

《Section 6.7》

1. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $R\mathrm{x} = Q^T\mathrm{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$

7. $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\1&1&0\\1&2&2\\1&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&5\\0&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow R\mathrm{x}=Q^T\mathrm{b}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&4&5\\0&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-4\end{bmatrix}$

$x_1=1/2,\ x_2=5/2,\ x_3=-2$

8. $A\mathrm{x}=\mathrm{b}\Leftrightarrow QR\mathrm{x}=\mathrm{b}$ 이므로 $A=QR\Rightarrow Q^TA=R$

9. $A=QR$ 이므로 $0\neq\det A=\det Q\det R=(\pm1)(r_{11}r_{22}\cdots r_{nn})$이다.

$\therefore r_{ii}\neq0\ (i=1,2,\cdots,n)$

10. $A=Q$ 이므로 $A=QI_n$

Chapter 07 연습문제 답안

《Section 7.1》

1. 선형변환

2. 선형변환 아님: $L(kx) = (1, kx) \neq kL(x)$

3. 선형변환 아님: $L(kx, ky, kz) = (2kx - ky,\ k^2 yz) \neq kL(x,y,z)$

4. 선형변환 아님: $L(kx,\ ky) = k^2xy \neq kL(x,y)$

5. 선형변환

6. 선형변환

7. 선형변환 아님: $L(kx,\ ky) = (kx,\ \tan ky) \neq kL(x,y)$

8. 선형변환 아님: $L(kx,\ ky) = (0,\ k^2xy) \neq kL(x,y)$

9. 선형변환 아님: $L(-x,\ -y,\ -z) = (|x|,\ 0) \neq -L(x,y,z)$

10. 선형변환

11. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

15. $L(2,3,4) = (21, -11)$

16. $L(1,2,3) = (14, -5)$

17. $L(1, -2, 3) = (2, 15)$

18. $L(1,1,-1) = (3, -12)$

19. $L(x,y,z) = (2x+3y+2z,\ -4x-5y=3z)$

20. $L(3\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3) = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$

21. (1) $\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A+B) &= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn}) \\ &= (a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+b_{33}+\cdots+b_{nn}) \\ &= \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{tr}\,(k(A+B)) = k\,\mathrm{tr}(A) + k\mathrm{tr}(B)$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(k(A+B)) &= k(a_{11}+b_{11}) + k(a_{22}+b_{22}) + \cdots + k(a_{nn}+b_{nn}) \\ &= k(a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}) + k(b_{11}+b_{22}+b_{33}+\cdots+b_{nn}) \\ &= k\,\mathrm{tr}(A) + k\,\mathrm{tr}(B) \end{aligned}$$

22. $L(\mathbf{0}) = (a,b) \neq (0,0)$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

《Section 7.2》

1. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} \cos(2\tan^{-1}a) & \sin(2\tan^{-1}a) \\ \sin(2\tan^{-1}a) & -\cos(2\tan^{-1}a) \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

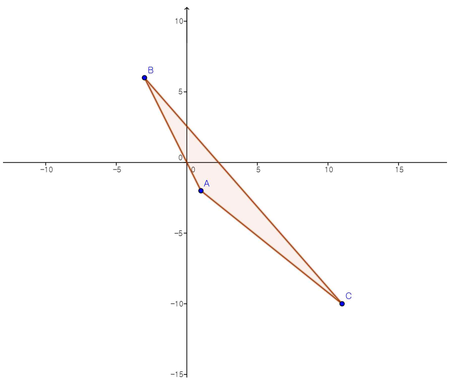
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

7. $\triangle ABC$의 넓이=6

8.



9. 24

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+6y \end{bmatrix}$ 이므로 $3(x+2y) = 3x+6y$

11. 회전변환은 도형의 크기를 변화시키지 않으므로 넓이가 변하지 않는다.

12. $5x-3y+1=0$

13. y-축 층밀림, y-축 확대, y-축 대칭, x-축 층밀림

14. $(\frac{3+\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$

15. $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

16. $(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$

17. $\tan\theta = m$이므로 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$, $\sin\theta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$

그러므로

$$H = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+m^2} & \frac{m}{1+m^2} \\ \frac{m}{1+m^2} & \frac{m^2}{1+m^2} \end{bmatrix}$$

《Section 7.3》

1. 예

2. 아니오

3. 예

4. 아니오

5. $\ker L = \{(x,y) | x = 0\}$

6. $\mathrm{Im L} = \{(x,0) \backslash x \in R\}$

7. 예

8. 아니오

9. 예

10. 아니오

11. $\ker L = \{(x,y) | y = 0\}$

12. $\mathrm{Im L} = \{(0,y) | y \in R\}$

13. 아니오

14. 예

15. 예

16. 아니오

17. $\ker L = \{t(-2,1) | t \in R\}$

18. $\mathrm{ImL} = \{t(1,2) | t \in R\}$

19. 단사

20. $\mathrm{rank}(\mathrm{L}) = 3$

21. $\mathrm{rank}(\mathrm{L}) = 2$

22. $\mathrm{nullity}(\mathrm{L}) = 0$

23. 선형변환 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이 $L(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$ 일 때, L 이 단사일 필요충분조건은 표준행렬의 계수 n이므로 가역이다. 그러므로 $\det(A) \neq 0$ 이다.

24. $L(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$ 일 때, ImL 은 A 의 열벡터들의 모든 일차결합이므로 열공간이다.

25. $L(1,1,1) = 3(1,0,3)$이므로 $\mathrm{b} = (1,0,3)$은 열공간에 들어있다.

26. $(1,1)$은 ImL에 들어 있지 않다.

27. A

《Section 7.4 》

1. 직교행렬

2. 직교행렬

3. $T(\mathrm{x}) \cdot T(\mathrm{y}) = -2$

4. $\|T(\mathrm{x})\| = \sqrt{38}$, $\|T(\mathrm{y})\| = \sqrt{19}$

5. $\det\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = 1$

6. $\det\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 1$

7. $a = 0, b = -\frac{2}{\sqrt{6}}, c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8. $2a^2 + 2b^2 = 1$

9. $\frac{1}{2}$

10. $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 4\{\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| - \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|\}$이므로 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 0$이다.

11. $R_\theta, \ \theta = -\frac{\pi}{6}$

12. $R_\theta, \ \theta = \frac{\pi}{4}$

13. $H_{\frac{\theta}{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{8}$

14. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

16. A가 직교행렬이므로 각을 보존한다. 그러므로 사잇각은 $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{26}}$

《Section 7.5》

1. $AB = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 1 \\ -5 & -15 & -8 \\ 44 & -11 & 45 \end{bmatrix}$

2. $BA = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 21 \\ 10 & -8 & 4 \\ 45 & 3 & 25 \end{bmatrix}$

3. $T(L(x,\ y)) = (3x+3y, 6x-2y)$, $L(T(x,\ y)) = (5x+4y, x-4y)$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\mathbb{R}^2$에서 x축에 대칭인 선형변환

9. $\mathbb{R}^2$에서 y축에 대칭인 선형변환

10. $\mathbb{R}^2$에서 $k=1/3$ 축약인 선형변환

11. $\mathbb{R}^2$에서 $k=2$ 늘림인 선형변환

12. $\begin{cases} w_1 = -x_1 + 2x_2 \\ w_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} w_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ w_2 = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ w_3 = -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \end{cases}$

14. $L \circ T = T \circ L$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

16. $T_2 \circ T_1(\mathrm{x}) = T_2 \circ T_1(\mathrm{y}) \xrightarrow[\text{단사}]{T_2} T_1(\mathrm{x}) = T_1(\mathrm{y}) \xrightarrow[\text{단사}]{T_1} \mathrm{x} = \mathrm{y}$

17. 직선의 매개방정식을 $l : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases}$라 하면 $L(l) : \begin{cases} (ax_0 + by_0) + (au_1 + bu_2)t \\ (cx_0 + dy_0) + (cu_1 + du_2)t \end{cases}$이므로 직선이다.

《Section 7.6 》

1. $[L]_S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{11} & -\dfrac{56}{11} \\ -\dfrac{2}{11} & \dfrac{3}{11} \end{bmatrix}$

2. $[L]_S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{11} & -\dfrac{49}{11} \\ \dfrac{1}{11} & -\dfrac{18}{11} \end{bmatrix}$

3. $[L]_S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

4. $[L]_S = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $[L]_S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $[L]_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & 0 & \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -2 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

7. $P^{-1}AP = B$

8. $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$ 인 P, Q가 존재하므로 닮음이다.

9. 임의의 양의 정수 k에 대하여 A^k는 $B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$이므로 닮은 행렬이다.

10. $B^T = (P^{-1}AP)^T = P^TA^T(P^T)^{-1} = Q^{-1}A^TQ$

11. $P^{-1}AP = B$이므로 $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$이다. 그러므로 A^{-1}와 B^{-1}는 닮음행렬이다.

12. 가역행렬 A, B에 대하여 AB와 BA는 닮음행렬이다.

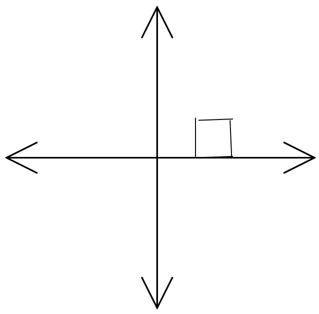
13. A와 B가 $A^n = 0, B^n = 0$인 멱영원이라면 A와 B는 닮음행렬이다.

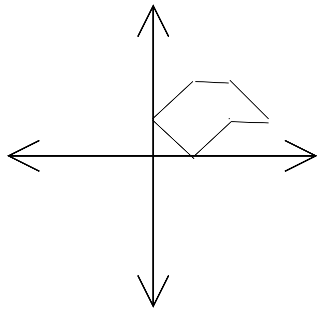
14. 선형변환이 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이고 $S = \{\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n\}$, $T = \{\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_m\}$가 각각 $\mathbb{R}^n$과 $\mathbb{R}^m$의 기저이면, 행렬 $[\mathrm{y}_1\,\mathrm{y}_2 \cdots \mathrm{y}_m \mid L(\mathrm{x}_1) \mid L(\mathrm{x}_2) \mid \cdots \mid L(\mathrm{x}_n)]$을 $[I_n \mid A]$와 같은 형태의 RREF로 변환하여 $A = [L]_{S,T}$ 를 쉽게 구한다. 그런데 행렬의 RREF는 유일하다.

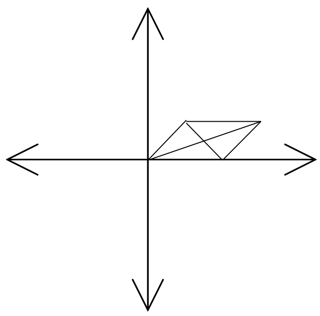
15. (1) $B = P^{-1}AP$라 하면 P는 가역 행렬이므로 계수를 변화시키지 않는다. 그러므로 계수가 같다.
(2) 계수가 같으므로 rank-nullity 정리에 의해 퇴화차수가 같다.
(3) 특성다항식이 같으므로 고유값이 같다. 그러므로 대각합이 같다.

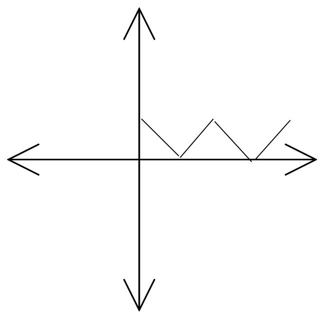
《Section 7.7》

1~4.









5. $V=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $V=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $V=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8. $V=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Chapter 08 연습문제 답안

《Section 8.1》

1. $\lambda^2 - 4\lambda + 3$

2. $\lambda^2 + \lambda - 6$

3. $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda - 19$

4. $\lambda^3 - 6\lambda^2$

5. $\lambda = 1$

6. $\lambda = 0$

7. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1$

8. $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$

9. $\lambda = 4$(다른 두 고유값은 복소수)

10. $\lambda = 3$

11. 주어진 행렬의 고유값은 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$.

    $\lambda_1 = 2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1 = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(s \neq 0)$,

    $\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_2 = t\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$

    고유값 $\lambda_1 = 2$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

    고유값 $\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

12. 주어진 행렬의 고유값은 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=3+\sqrt{2},\ \lambda_3=3-\sqrt{2}$

$\lambda_1=-1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1=r\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\ (r\neq 0)$

$\lambda_2=3+\sqrt{2}$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_2=s\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}+1}\\\frac{\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+1}\\1\end{bmatrix}\ (s\neq 0)$

$\lambda_3=3-\sqrt{2}$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_3=t\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}-1}\\\frac{\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}-1}\\1\end{bmatrix}\ (t\neq 0)$

고유값 $\lambda_1=-1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_2=3+\sqrt{2}$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}+1}\\\frac{\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+1}\\1\end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_3=3-\sqrt{2}$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}-1}\\\frac{\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}-1}\\1\end{bmatrix}\right\}$

13. 주어진 행렬의 고유값은 $\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=-1,\ \lambda_4=-2$

$\lambda_{1,2}=1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_{1,2}=r\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}\ (r,\ s\neq 0)$

$\lambda_3=-1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_3=t\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}\ (t\neq 0)$

$\lambda_4=-2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_4=w\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\ (w\neq 0)$

고유값 $\lambda_{1,2}=1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_3=-1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_4=-2$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

14. 주어진 행렬의 고유값은 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$

$\lambda_1=1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1=s\begin{bmatrix}3\\-3\\1\\0\end{bmatrix}\ (s\neq 0)$

$\lambda_2=2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_2=t\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\ (t\neq 0)$

고유값 $\lambda_1=1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}3\\-3\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_2=2$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

15. $d_1,\ d_2,\ \cdots, d_n$

16. 주어진 행렬의 특성방정식은 $P_A(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-5$,

$P_A(A)=A^3-3A^2+5A-5I_3=0$임을 알 수 있다.

17. $P_A(A)=A^3-3A^2+5A-5I_3=0$이므로 $A^3=3A^2-5A+5I_3$이다. 이 식의 양변에 A^2을 곱한 후 정리하면 $A^5=\begin{bmatrix}16&1&4\\-1&14&6\\2&-3&13\end{bmatrix}$이다. 한편 $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$이다.

18. A, B가 닮은 행렬이라면 가역행렬 P에 대하여 $A=P^{-1}BP$이다.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= |\lambda I_n - A| \\ &= |\lambda I_n - P^{-1}BP| \\ &= |P^{-1}(\lambda P - BP)| \\ &= |P^{-1}(\lambda I_n - B)P| \\ &= |P^{-1}||\lambda I_n - B||P| \\ &= |P^{-1}P||\lambda I_n - B| \\ &= |\lambda I_n - B| = P_B(\lambda) \end{aligned}$$

따라서 닮은 행렬 A, B는 동일한 특성다항식과 고유값을 갖는다.

19. $$\begin{aligned} P_{A^T}(\lambda) &= |\lambda I_n - A^T| \\ &= |(\lambda I_n - A)^T| \\ &= |\lambda I_n - A| = P_A(\lambda) \end{aligned}$$

20. 정리 7.1.3에 의하여 $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$이다. 따라서 $\lambda_i = 0$일 필요충분조건은 $\det(A) = 0$이다.

21. n차 정사각행렬 A가 하삼각행렬이라면 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$이다. 그러면 $\lambda I_n - A$도 하삼각행렬이므로 고유값을 구하면

$$P_A(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$이므로 고유값은 행렬 A의 고유값은 주대각선 성분 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$임을 알 수 있다.

22. 행렬 A의 특성다항식은

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{2n} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

이고, $(n-1)$차 항의 계수는 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$ 항에서만 만들어지므로

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots$$

그런데 A의 고유값을 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$이라 하면

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

따라서

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{tr}(A)$$

《Section 8.2》

1. $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2]=\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=D$$

2. $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2]=\begin{bmatrix}0 & -5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 1\\ -\frac{1}{5} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -5\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=D$$

3. $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2]=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=D$$

4. 고유값은 실수범위에서 구할 수 없다. 따라서 이 행렬은 대각화 가능하지 않다.

5. $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2\ \ \mathrm{x}_3]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=D$$

6. 고유값은 실수범위에서는 구할 수 없다. 따라서 이 행렬은 대각화 할 수 없다.

7. $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2\ \ \mathrm{x}_3]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=D$$

8. $P=[\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \mathbf{x}_3]=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=D$$

9. $P=[\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \mathbf{x}_3\ \ \mathbf{x}_4]=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$ 이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&-2&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=D$$

10. $P=[\mathbf{x}_1\ \ \mathbf{x}_2\ \ \mathbf{x}_3\ \ \mathbf{x}_4]=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-4\\1&0&0&1\end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{4}&1\\0&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-4\\1&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}=D$$

11. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 특성다항식을 구하면 $P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$

따라서 일반적으로 A가 대각화 가능하려면 이 방정식이 서로 다른 두 근을 가져야 한다. 즉, $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc > 0$

12. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 특성다항식을 구하면 $P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$

따라서 일반적으로 A가 대각화 가능하지 않으려면 이 방정식이 근을 갖지 않아야 한다. 즉, $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc < 0$이면 A는 대각화 가능하지 않다.

13. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$의 고유값을 구하면 $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 5$이다. 한편 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$이므로

행렬 P는 행렬 A를 대각화하는 행렬이다.

14. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$의 고유값을 구하면 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$이고, 이 고유값에 대응하는

고유벡터는 각각 $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 다음 행렬이 행렬

A를 대각화 하는 행렬이다.

$$P = [\mathbf{x_1}\ \ \mathbf{x_2}\ \ \mathbf{x_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$의 고유값을 구하면 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$이다.

즉, 3개의 고유값이 모두 다르므로 주어진 행렬은 대각화 가능하다.

16. 주어진 행렬의 특성방정식은 $x^3 - 3x + 2 = 0$이므로 고유값은 1과 -2이다. 이때 1이 중근이므로 고유값 1의 대수적 중복도는 2이고 고유값 2의 대수적 중복도는 1이다.

17. 주어진 행렬의 특성방정식은 $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$이므로 고유값은 -1과 3이다. 이때 -1과 3은 중근이므로 두 고유값의 대수적 중복도는 2이다.

18. 문제오류 (삭제바람)

19. 행렬 A가 대각화 가능이라면 가역행렬 P와 대각행렬 D에 대하여 $D = P^{-1}AP$이다. 그런데 대각행렬 D의 역행렬 D^{-1}도 대각행렬이고

$$\begin{aligned} D^{-1} &= (P^{-1}AP)^{-1} \\ &= P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} \\ &= P^{-1}A^{-1}P \end{aligned}$$

따라서 A^{-1}도 대각화 가능하다.

20. 행렬 A가 대각화 가능이라면 가역행렬 P와 대각행렬 D에 대하여 $D = P^{-1}AP$이다. 그런데 대각행렬 D에 대하여 D^k도 대각행렬이고

$$\begin{aligned} D^k &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots A(P^{-1}P) \\ &= P^{-1}A^kP \end{aligned}$$

따라서 A^k도 대각화 가능하다.

21. 행렬 A가 대각화 가능이라면 가역행렬 P와 대각행렬 D에 대하여 $D = P^{-1}AP$이다. 그런데 대각행렬 D의 역행렬 D^T도 대각행렬이고

$$\begin{aligned} D^T &= (P^{-1}AP)^T \\ &= P^TA^T(P^{-1})^T \\ &= ((P^{-1})^{-1})^TA^T(P^{-1})^T \\ &= (P^{-1})^T)^{-1}A^T(A^{-1})^T \end{aligned}$$

따라서 A^T도 대각화 가능하다.

《Section 8.3》

1. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각

   $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이고,

   고유값 $\lambda_2 = 2$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다.

2. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 6$이고, 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$이므로

   고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다. 고유값 $\lambda_2 = 6$에 대응하는

   고유벡터는 $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_2 = 6$에 대응하는 고유공간의 차원은

   2이다.

3. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3$이고, 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유벡터는

   $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 2이다.

   고유값 $\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_2 = 3$에 대응하는

   고유공간의 차원은 1이다.

4. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 8$이고, 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유벡터는

   $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은

   3이다. 고유값 $\lambda_2 = 8$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_2 = 8$에

   대응하는 고유공간의 차원은 1이다.

5. 전치행렬과 역행렬이 같다. 따라서 이 행렬은 직교행렬이다.

6. 전치행렬과 역행렬이 같다. 따라서 이 행렬은 직교행렬이다.

7. 역행렬은 전치행렬과 같으므로 $A^{-1}=A^{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 이다.

8. $P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

9. $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

10. $P=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. $P=\begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

12. $P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$

13. $$\begin{aligned} (A\mathrm{x})\cdot(A\mathrm{y}) &= A(\mathrm{x}\cdot A)\cdot \mathrm{y} \\ &= A(A^{T}\mathrm{x}^{T})\mathrm{y} \\ &= AA^{-1}(\mathrm{x}^{T}\mathrm{y}) \\ &= \mathrm{x}^{T}\mathrm{y} \\ &= \mathrm{x}\cdot\mathrm{y} \end{aligned}$$

14. $\det(AA^{-1})=\det(A)\det(A^{-1})=\det(A)\det(A^{T})=\det(A)\det(A)=(\det(A))^2=1$

따라서 $\det(A) = \pm 1$이다.

15. $\mathrm{x} = A^{-1}A\mathrm{x} = A^{T}A\mathrm{x} = \lambda^2\mathrm{x}$

따라서 $\lambda^2 = 1$이므로 고유값의 절대값은 1이다.

16. $$\begin{aligned}(AB)^T &= B^T A^T \\ &= B^{-1}A^{-1} \\ &= (AB)^{-1}\end{aligned}$$

따라서 AB는 직교행렬이다.

17. A가 직교행렬이므로 $(A^T)^T = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$이다. 따라서 A^T도 직교행렬이다.

18. (1)⇒(2) A가 직교행렬이면 $A^T = A^{-1}$이므로 $A^TA = A^{-1}A = I_n = AA^{-1} = AA^T$

(2)⇒(3) $A^TA = I_n = AA^T$이면 서로 다른 열(행)벡터의 내적은 0이고 같은 벡터의 내적은 1이다. 따라서 A의 열(행)벡터들은 정규직교집합을 이룬다.

(3)⇒(1) A의 열(행)벡터들이 정규직교집합을 이루면 A는 직교행렬이다.

《Section 8.4》

1. $A^5 = \begin{bmatrix} 65 & -66 \\ 33 & -34 \end{bmatrix}$

2. $A^5 = \begin{bmatrix} 94 & -93 \\ 62 & -61 \end{bmatrix}$

3. $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -62 & 31 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -62 & 32 \end{bmatrix}$

4. $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -93 & 31 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$

5. $A^n = \begin{bmatrix} \dfrac{(-4)^n + 4^n}{2} & -(-4)^n + 4^n \\ \dfrac{-(-4)^n + 4^n}{4} & \dfrac{(-4)^n + 4^n}{2} \end{bmatrix}$

6. $A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_0 = \begin{bmatrix} C_0 \\ R_0 \end{bmatrix}$라 하면

$$\begin{aligned} \mathrm{x}_k = \begin{bmatrix} C_k \\ R_k \end{bmatrix} &= A^k \mathrm{x}_0 \\ &= A^k \begin{bmatrix} C_0 \\ R_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

따라서 A^k을 계산하면 k년 후의 인구분포를 알 수 있다. 그런데 행렬 A의 고유값이 $\lambda = 1,\ \dfrac{4}{5}$이고 이에 대응하는 고유벡터는 각각

$$\mathrm{v}_1 = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{v}_2 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s,\ t \in \mathbb{R})$$

이므로 A는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

이때 k 가 충분히 크면 $\left(\frac{4}{5}\right)^k$ 는 점점 작아져 0에 수렴하게 되므로

$$A^k=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\left(\frac{4}{5}\right)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathbf{x}_k &\approx \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_0\\R_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(C_0+R_0)\\\frac{1}{2}(C_0+R_0)\end{bmatrix}\\ &=(C_0+R_0)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

그러므로 초기 인구분포에는 상관없이 오랜 기간 후에는 전 인구의 $\frac{1}{2}$는 도시에 $\frac{1}{2}$은 시골에 거주하게 된다.

8. 초기 인구분포에는 상관없이 오랜 기간 후에는 전 인구의 $\frac{1}{2}$는 도시에 $\frac{1}{2}$은 시골에 거주하게 된다.

9. 호랑이와 산토끼는 모두 멸종한다.
이상을 종합하면 포획률 c 가 $c=0.5$일 때는 호랑이와 산토끼는 조화를 이루며 살아가고, $c<0.5$일 때는 호랑이와 산토끼의 수가 매년 증가하여 결국 인구폭발이 되며, $c>0.5$일 때는 호랑이와 산토끼는 모두 멸종한다.

10. $125000\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\\frac{5}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}46875\\78125\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{y}(t) = P\mathbf{x}(t)$
$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + \frac{3}{2} c_2 e^{3t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

12. $\mathbf{y}(t) = P\mathbf{x}(t)$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{7t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} c_1 e^{-t} + \frac{1}{2} c_2 e^{7t} \\ c_1 e^{-t} + c_2 e^{7t} \end{bmatrix}$$

13. $y_1(0) = 4e^t - 4e^{2t},\ y_2(0) = 4e^t - 3e^{2t}$

14. $y_1(0) = 0$
$y_2(0) = e^{3t}$
$y_3(0) = -e^{3t}$