

MSE, 이공계생을 위한 확률과 통계

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 안승철과 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

Chapter 10 연습문제 해답

10.1

$$(a) \bar{x} = \frac{1}{5}(1 + 2 + \dots + 5) = 3$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(2 + 5 + \dots + 8) = 5$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (1-3)^2 + (2-3)^2 + \dots + (5-3)^2 = 10$$

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = (2-5)^2 + (5-5)^2 + \dots + (8-5)^2 = 26$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (1-3)(2-5) + (2-3)(5-5) + \dots + (5-3)(8-5) = 14$$

$$r = \frac{14}{\sqrt{10} \sqrt{26}} \approx 0.868$$

$$(b) H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho > 0$$

$n = 5$ 이고 $r = 0.868$ 이므로 검정통계량 :

$$t_0 = \frac{0.868 \sqrt{5-2}}{\sqrt{1-(0.868)^2}} \approx 3.028$$

$$t_{0.05}(5-2) = t_{0.05}(3) = 2.353$$

$t_0 = 3.028 > t_{0.05}(3) = 2.353$ 이므로 H_0 를 기각한다. 따라서 첨가물의 양과 수율 사이에 양의 상관관계가 있다고 할 수 있다.

$$(c) \hat{b} = \frac{14}{10} = 1.4$$

$$\hat{a} = 5 - 1.4 \times 3 = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = 0.8 + 1.4x$$

$$(d) SSE = 26 - \frac{14^2}{10} = 6.4$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{6.4}{5-2} \approx 2.133$$

$$(e) r^2 = \frac{14^2}{10 \times 26} \approx 0.754$$

$$(f) \quad t_{0.025}(5-2) = t_{0.025}(3) = 3.182$$

$$0.8 - 3.182 \sqrt{2.133 \left(\frac{1}{5} + \frac{3^2}{10} \right)} < a < 0.8 + 3.182 \sqrt{2.133 \left(\frac{1}{5} + \frac{3^2}{10} \right)}$$

$$\Rightarrow 0.8 - 4.874 < a < 0.8 + 4.874$$

$$\Rightarrow -4.074 < a < 5.674$$

$$(g) \quad 1.4 - 3.182 \sqrt{\frac{2.133}{10}} < b < 1.4 + 3.182 \sqrt{\frac{2.133}{10}}$$

$$\Rightarrow 1.4 - 1.470 < b < 1.4 + 1.470$$

$$\Rightarrow -0.07 < b < 2.87$$

$$(h) \quad x = 6 \text{ 일 때, } \hat{a} + \hat{b}(6) = 0.8 + 1.4 \times 6 = 9.2$$

$$9.2 - 3.182 \sqrt{2.133 \left(\frac{1}{5} + \frac{(6-3)^2}{10} \right)} < a + bx$$

$$< 9.2 + 3.182 \sqrt{2.133 \left(\frac{1}{5} + \frac{(6-3)^2}{10} \right)}$$

$$\Rightarrow 9.2 - 4.874 < a + bx < 9.2 + 4.874$$

$$\Rightarrow 4.326 < a + bx < 14.074$$

(i) 검정통계량 :

$$|t_0| = \left| \frac{0.8 - 0}{\sqrt{2.133 \left(\frac{1}{5} + \frac{3^2}{10} \right)}} \right| \doteq 0.522$$

$$t_{0.025}(5-2) = t_{0.025}(3) = 3.182$$

$|t_0| = 0.522 < t_{0.025}(3) = 3.182$ 이므로 H_0 를 기각하지 못한다.

(j) 검정통계량 :

$$t_0 = \frac{1.4 - 0}{\sqrt{\frac{2.133}{10}}} \doteq 3.031$$

$$t_{0.05}(5-2) = t_{0.05}(3) = 2.353$$

$t_0 = 3.031 > t_{0.05}(3) = 2.353$ 이므로 H_0 를 기각한다.

10.3

$r(aX+b, cY+d)$ 은 $ac > 0$ 일 때 r 이고, $ac < 0$ 일 때 $-r$ 이 되므로
 $r(2X+3, -7Y+4) = -r$ 이다.

10.5

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho > 0$$

$n = 101$ 으로 표본의 크기가 크고, $r = 0.61$ 이므로 검정통계량 :

$$t_0 = \frac{0.61\sqrt{109}}{\sqrt{1-0.61^2}} \doteq 8.04$$

$t_0 = 8.04 > t_{0.05}(109) \approx Z_{0.05} = 1.645$ 이므로 H_0 를 기각한다. 따라서 반응온도와 품질의 특성치 간에 양의 상관관계가 있다고 할 수 있다.

10.7

$$(a) \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 = 14 - 10(0.4)^2 = 12.4$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n(\bar{y})^2 = 18 - 10(0.6)^2 = 14.4$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 12 - 10(0.4)(0.6) = 9.6$$

$$\Rightarrow r = \frac{9.6}{\sqrt{12.4} \sqrt{14.4}} \doteq 0.718$$

(b)

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{9.6}{12.4} \doteq 0.774$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

$$= 0.6 - 0.774 \times 0.4 = 0.2904$$

$$\Rightarrow \hat{y} = 0.2904 + 0.774x$$

$$(c) \text{ } SSE = 14.4 - \frac{9.6^2}{12.4} \doteq 6.97$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{6.97}{10-2} \doteq 0.87$$

$$(d) \text{ } r^2 = \frac{9.6^2}{12.4 \times 14.4} = 0.516$$

$$(e) \text{ } t_{0.025}(10-2) = t_{0.025}(8) = 2.306$$

$$0.774 - 2.306 \sqrt{\frac{0.87}{12.4}} < b < 0.774 + 2.306 \sqrt{\frac{0.87}{12.4}}$$

$$\Rightarrow 0.774 - 0.611 < b < 0.774 + 0.611$$

$$\Rightarrow 0.163 < b < 1.385$$

(f) 검정통계량 :

$$|t_0| = \left| \frac{0.774 - 0}{\sqrt{\frac{0.87}{12.4}}} \right| \doteq 2.922$$

$|t_0| = 2.922 > t_{0.025}(8) = 2.306$ 이므로 H_0 를 기각한다.

10.9

$$b = r \frac{s_y}{s_x} = 0.74 \times \frac{3}{4} = 0.555$$