

## 이산시간 푸리에 급수 및 변환

---

주파수 영역 해석은 필터 설계와 더불어 디지털 신호 처리의 핵심적인 주제이다. 따라서 책에서 이 장의 주제인 이산 시간 푸리에 급수 및 변환에 대해서 필요한 내용들을 상세하게 설명하였으므로 특별히 보충할 내용이 별로 없다. 따라서 간단한 보충 예제를 소개하여 이해를 돕도록 하였다.

책의 ‘1절 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)’ 및 ‘2절 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)’와 관련하여 간단한 예제들을 몇 개 추가하였다.

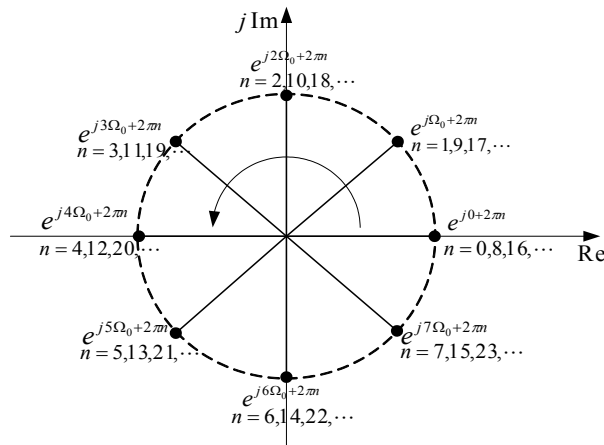
책의 ‘3절 이산 시간 푸리에 변환의 성질’과 관련하여 창 씌우기 정리와 필터 설계에 대한 상세한 설명을 보충하고 푸리에 변환의 성질들을 유용하게 활용하는 예제들을 보였으며, ‘4절 DTFT에 의한 이산 시스템 해석’과 관련된 간단한 예제들을 추가하였다.

책의 ‘5절 푸리에 표현의 상호 관계’의 내용들이 잘 이해될 수 있도록 네 가지 푸리에 표현에 대한 간단한 요약과 상호 연관성에 대한 부연 설명을 간략히 제시하고, 푸리에 해석에서 꼭 이해하고 기억해두어야 할 주요 사항들을 요약하여 제시하였다.

## 10.1 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)

### 10.1.1 이산 정현파 신호의 주기성

크기가 1이고  $\Omega_0 = 2\pi/8$ 로 주기 신호가 되기 위한 (책)식 (3.34)의 조건을 만족하는 복소 정현파  $e^{j\Omega_0 n}$ 은 [그림 C10-1]에 나타낸 것처럼  $n$ 이 커짐에 따라 복소 평면을 반시계 방향으로 돌면서 한 번에 위상이  $\Omega_0$ 씩 자리 이동을 한다. 따라서  $n$ 이 8번 증가하면 한 바퀴 돌아서 정확히 회전 직전의 원래 위치로 되돌아오게 된다. 즉, 주기가  $N=8$ 로 동일한 패턴을 반복한다. 또한 주파수가  $\Omega_0 + 2\pi$ 인 복소 정현파  $e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n}$ 는  $n$ 이 1, 2, 3, ...으로 커짐에 따라 단위원을 1, 2, 3, ...바퀴 돌아 주파수가  $\Omega_0$ 인 복소 정현파와 똑같이 위상이  $\Omega_0$ 인 점에 위치한다. 따라서 두 신호는 완전히 일치하여 구분을 할 수가 없다. 즉, 주파수  $\Omega_0$ 에  $2\pi$ 를 더하는 것은 단지 단위원을 몇 바퀴 더 돌게 만들 뿐이다. 그러므로 단위원을 한 바퀴 도는 데 필요한 주파수 범위만 고려하면 모든 이산 (복소) 정현파 신호를 빠짐없이 표현할 수 있다.



[그림 C10-1] 복소 정현파의 주기성 예

### 10.1.2 이산 시간 푸리에 급수의 개요

#### ■ 예제 C10-1 : 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)의 계산

[그림 C10-2(a)]에 나타낸 이산 정현파  $x[n] = \sin(0.1\pi n)$ 에 대한 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)를 구하고 진폭 및 위상 스펙트럼을 그려라.

<풀이>

$\sin(0.1\pi n)$ 은  $\Omega_0 = 0.1\pi$ 이고  $F_0 = \Omega_0/2\pi = 1/20$ 이 유리수이므로 주기 신호이며, 그 주기는  $N=20$ 이다. 따라서, 푸리에 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{19} X_k e^{j0.1\pi kn}$$

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{20} \sum_{n=0}^{19} \sin(0.1\pi n) e^{-j0.1\pi kn} \\ &= \frac{1}{40j} \sum_{n=0}^{19} (e^{j0.1\pi n} - e^{-j0.1\pi n}) e^{-j0.1\pi kn} \\ &= \frac{1}{40j} \left[ \sum_{n=0}^{19} e^{j0.1\pi n(1-k)} - \sum_{n=0}^{19} e^{-j0.1\pi n(1+k)} \right] \end{aligned}$$

위의 푸리에 계수  $X_k$ 의 계산식에서 마지막 등식의 첫 번째 합은, (책)식 (10.6)의 복소 정현파의 직교성에 의해  $k=1$ 의 경우를 제외한 모든  $k$ 에 대해 0이고,  $k=1$ 일 때 합은  $N=20$ 이 된다. 같은 방법으로 두 번째 합은  $k=19$ 를 제외한 모든  $k$ 에 대해 0이고 그때의 합은 역시  $N=20$ 이다. 따라서  $X_1$ 과  $X_{19}$ 만 값을 가지며 나머지 모든 다른 계수는 0이다.

$$X_1 = \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/2}$$

$$X_{19} = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{2} e^{j\pi/2}$$

따라서  $x[n]$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

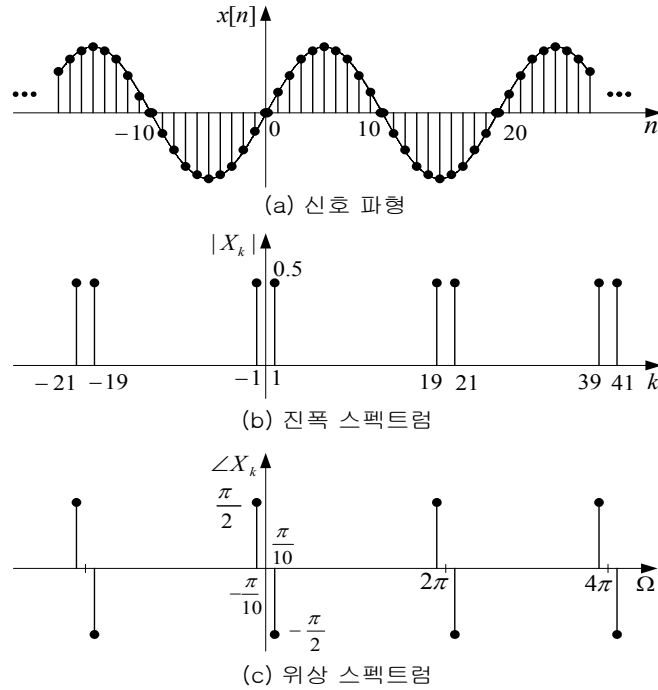
$$x[n] = \frac{1}{2j} (e^{j0.1\pi n} - e^{j1.9\pi n}) = \frac{1}{2j} (e^{j0.1\pi n} - e^{-j0.1\pi n})$$

이 결과는 바로 삼각 함수에 대한 오일러 공식으로서, 지금과 같이 푸리에 계수를 구하는 공식을 이용하지 않고도 훨씬 간단하게 구할 수 있었을 것이다. 이를 달리 해석하면, 푸리에 급수는 주기 신호  $x[n]$ 을 복소 정현파  $e^{-j\Omega_0 n}$ 과 그 고조파들의 합으로 표현한 것에 불과하다는 뜻이 된다. 이 경우,  $\sin(0.1\pi n)$ 이 두 복소 정현파  $e^{j0.1\pi n}$ 와  $e^{-j0.1\pi n}$ 에 의해 표현될 수 있다는 사실을 푸리에 급수가 말해주고 있는 것이다.

얻어진 푸리에 계수로부터 진폭 스펙트럼과 위상 스펙트럼을 구하면 다음과 같으며, 그림 (b)와 (c)에 나타내었다.

$$\begin{aligned} |X_1| &= |X_{19}| (= |X_{-1}|) = \frac{1}{2} \\ \angle X_1 &= \frac{\pi}{2}, \quad \angle X_{19} = \angle X_{-1} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

그림 (b)와 (c)를 비교하면, 주파수축에서 고조파  $0 \leq k < 20$ 에 대응하는 주파수 구간은  $0 \leq \Omega < 2\pi$ 이며,  $2\pi$  주기로 스펙트럼이 반복됨을 알 수 있다. ■



[그림 C10-2] 이산 정현파  $\sin(0.1\pi k)$ 와 그 스펙트럼

■ 예제 C10-2 : 정현파로 구성된 이산 주기 신호의 푸리에 계수 계산

다음과 같은 이산 주기 신호에 대해 푸리에 급수를 구하라.

$$x[n] = 1 + \sin\frac{\pi}{4}n + 2\cos\frac{\pi}{2}n$$

<풀이>

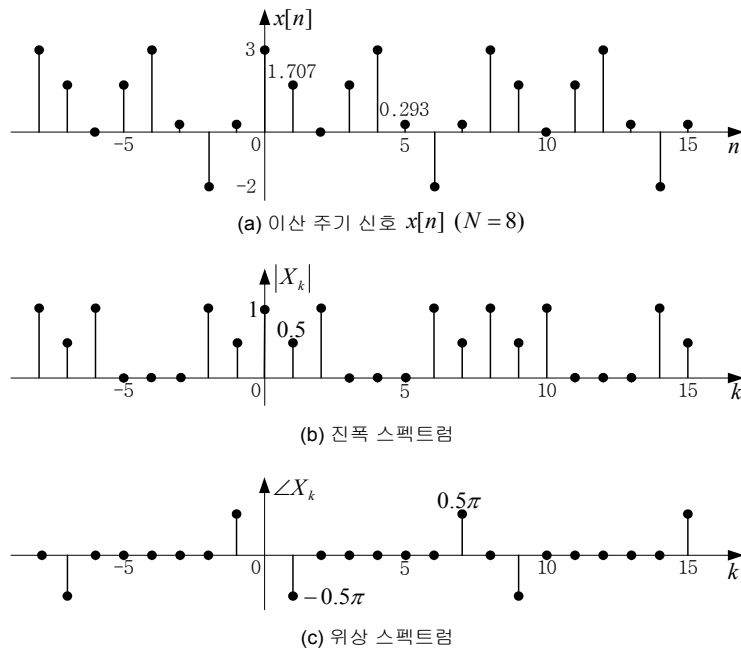
이산 주기 신호  $x[n]$ 이 (복소) 정현파들만으로 구성되어 있으므로, (책)식 (10.9)를 직접 계산하기보다 오일러 공식을 이용하여 직관적으로 푸리에 계수를 결정하는 것이 더 수월하다. 사인 항의 주기는  $N_1 = 8$ 이고 코사인 항의 주기는  $N_2 = 4$ 이므로, 두 항의 공통 주기인  $N = 8$ 이 신호  $x[n]$ 의 주기가 되고 기본 주파수는  $\Omega_0 = \pi/4$ 이다. 따라서 오일러 공식을 이용하여 정현파들을 복소 정현파로 바꾸어 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x[n] &= e^{j0\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2j} \left( e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n} \right) + \left( e^{j2\frac{\pi}{4}n} + e^{-j2\frac{\pi}{4}n} \right) \\ &= e^{j0\frac{\pi}{4}n} - \frac{j}{2} \left( e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{j(-\frac{\pi}{4}+2\pi)n} \right) + \left( e^{j2\frac{\pi}{4}n} + e^{j(-\frac{2\pi}{4}+2\pi)n} \right) \\ &= e^{j0\frac{\pi}{4}n} - \frac{j}{2} e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{j2\frac{\pi}{4}n} + e^{j6\frac{\pi}{4}n} + \frac{j}{2} e^{j7\frac{\pi}{4}n} \end{aligned}$$

이때 첫 번째 등식 ( $\langle N \rangle = [-4, 3]$ ) 또는 마지막 등식 ( $\langle N \rangle = [0, 7]$ )과 (책)식 (10.9)를 비교하여 다음과 같이 푸리에 계수를 얻는다.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{-4} = 0 \\ X_{-3} = 0 \\ X_{-2} = 1 \\ X_{-1} = \frac{j}{2} \\ X_0 = 1 \\ X_1 = -\frac{j}{2} \\ X_2 = 1 \\ X_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{또는} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 = 1 \\ X_1 = -\frac{j}{2} \\ X_2 = 1 \\ X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \\ X_5 = 0 \\ X_6 = 1 \\ X_7 = \frac{j}{2} \end{array} \right.$$

푸리에 계수로부터 구한 진폭 스펙트럼과 위상 스펙트럼을 [그림 C10-3]에 나타내었다. 그림에서 보면, 스펙트럼도 주기  $N=8$ 로 반복되고 있으며, 진폭 스펙트럼은 우함수 대칭, 위상 스펙트럼은 기함수 대칭을 만족하고 있다. 따라서 7장에서 살펴본 실수 신호의 푸리에 스펙트럼에 대한 대칭성이 이산 신호의 경우에도 성립한다는 것을 알 수 있다. ■



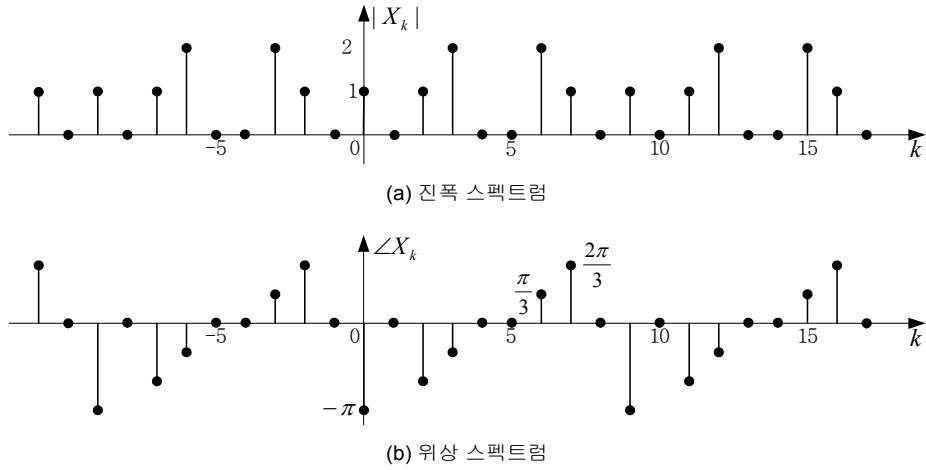
[그림 C10-3] [예제 C10-2]의 이산 주기 신호와 스펙트럼

### ■ 예제 C10-3 : 스펙트럼에 의한 신호의 합성

[그림 C10-4]와 같이 신호의 스펙트럼이 주어질 때, 이로부터 이산 신호를 합성하라.

#### <풀이>

그림에서 보면 스펙트럼이 주기  $N=9$ 로 반복되고 있으므로 기본 주파수는  $\Omega_0 = 2\pi/9$ 이다. 반주기 구간  $0 \leq \Omega \leq \pi$  ( $0 \leq k < 5$ ) 내에 주파수 0에서 크기 1이고 위상  $-\pi$ ,  $\Omega_0$ 에서 2,  $2\Omega_0$ 에서 크기 1이고 위상  $-2\pi/3$ ,  $3\Omega_0$ 에서 크기 2이고 위상  $-\pi/3$ 인 주파수 성분이 있으므로 합성 신호  $x[n]$ 은 다음과 같이 된다.



[그림 C10-4] [예제 C10-3]의 합성할 신호의 스펙트럼

$$x[n] = -1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}n - \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{6\pi}{9}n - \frac{\pi}{3}\right)$$

(책)식 (10.8)의 DTFS 합성식에서 총합 구간을  $\langle N \rangle = [-4, 4]$ 으로 하여 구하여도

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-4}^4 X_k e^{jk\frac{2\pi}{9}n} \\ &= 2e^{j\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{6\pi}{9}n} + e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j\frac{4\pi}{9}n} - 1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j\frac{4\pi}{9}n} + 2e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j\frac{6\pi}{9}n} \\ &= -1 + \left( e^{j(\frac{4\pi}{9}n - \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(\frac{4\pi}{9}n - \frac{2\pi}{3})} \right) + \left( e^{j(\frac{6\pi}{9}n - \frac{\pi}{3})} + e^{-j(\frac{6\pi}{9}n - \frac{\pi}{3})} \right) \\ &= -1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}n - \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{6\pi}{9}n - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

가 되어 같은 결과를 얻는다. 두 계산 과정을 비교해보면, 앞의 방법이 더 간편하다는 것을 알 수 있다. ■

### 10.1.3 이산 시간 푸리에 급수의 성질

#### ■ 예제 C10-4 : 임펄스 열에 의한 시간 이동 성질

$\delta[n]$ 을 간격  $N$ 으로 세워놓은 임펄스 열의 푸리에 급수 표현을 구하라.

<풀이>

임펄스 열은 주기가  $N$ 인 주기 신호로, 기본 주파수는  $\Omega_0 = 2\pi/N$ 이다. 이 신호의 푸리에 급수 표현의 푸리에 계수는 다음과 같이 계산한다.

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

임펄스 열이  $n_0$  만큼 시간 지연되면, 푸리에 계수는 다음과 같이 달라진다.

$$X'_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n - n_0] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} e^{-jk\Omega_0 n_0}$$

두 식을 비교하면, 시간 지연에 의해 진폭 스펙트럼은 변하지 않고 위상 스펙트럼만 주파수에 비례하여 기울기  $n_0$ 로 선형적으로 감소한다. 그런데  $N$ 만큼 시간 이동하면 다시 원래 신호가 되므로, 시간 이동 효과는  $n_0 \bmod N$ 으로 최대  $N$ 을 넘지 못하고 고조파의 위상 변화도  $2\pi$ , 즉  $\pm\pi$ 를 넘지 않는다.

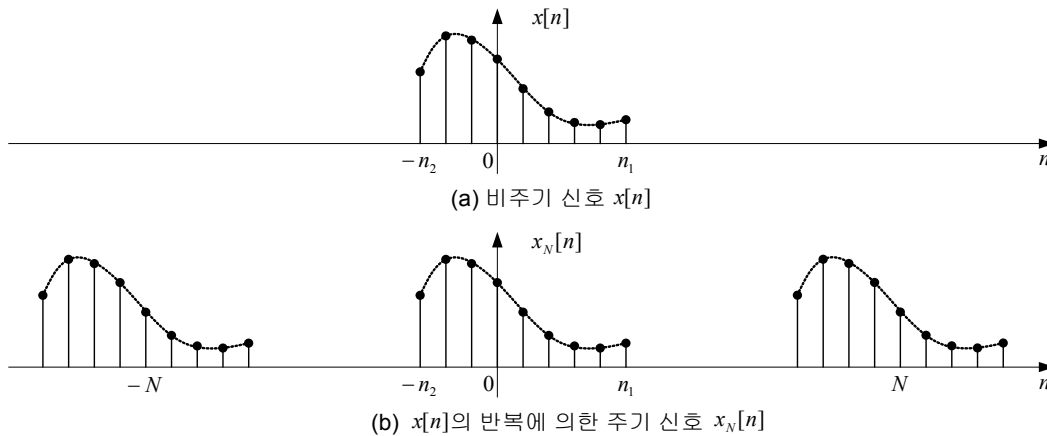
## 10.2 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)

### 10.2.1 이산 시간 푸리에 변환의 개요

연속계에 대한 푸리에 변환을 유도할 때, 한 주기 동안 비주기 신호  $x(t)$ 와 일치하는 주기 신호  $x_T(t)$ 를 만들어서 이를 이용하여  $x(t)$ 를 표현한 뒤, 주기를 무한대로 접근시키면  $x(t)$ 와  $x_T(t)$ 가 점점 일치하게 되어  $x_T(t)$ 에 대한 푸리에 급수가  $x(t)$ 에 대한 푸리에 표현 역할을 하게 됨을 이용하였다.

마찬가지로 이산 비주기 신호  $x[n]$ 을 [그림 C10-5]와 같이 주기  $N$ 으로 반복하여  $N$ -주기 신호  $x_N[n]$ 을 만들면 그것을 이산 푸리에 급수로 표현할 수 있고, 이때 주기  $N$ 을 무한대로 접근시키면 주기 신호와 비주기 신호는 점점 같아지게 될 것이다. 따라서, 주기 신호의 이산 시간 푸리에 급수에  $N \rightarrow \infty$ 의 극한을 취하면 비주기 신호  $x[n]$ 을 주파수 영역에서 표현한 것이 될 것이다.

이런 원리에 입각하여 책에서 설명한 것과 같이 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)을 유도해낼 때, (책)식 (10.11)에  $N \rightarrow \infty$ 의 극한을 취하면,  $\Omega_0$ 가 매우 작아져서 모든 주파수 성분들이 점점 가까이 모여들어 궁극적으로는 이산 스펙트럼이 연속적인 스펙트럼으로 변하게 되겠지만, 푸리에 계수  $X_k$ 의 크기가  $1/N$ 의 곱셈 때문에 점점 작아져서 0으로 되어버리는 문제가 생긴다. 따라서 이를 피하기 위해  $N \rightarrow \infty$ 의 극한을 취하기 전에 먼저 스펙트럼이 연속적으로 되는 성질을 반영한  $NX_k$ 의 포락선 함수  $X(\Omega)$ 를 정의한 것이다.



[그림 C10-5] 신호  $x[n]$ 의 주기적 확장에 의한 주기 신호  $x_N[n]$

#### ■ 예제 C10-5 : 주기 신호의 DTFT

다음과 같은 이산 주기 신호의 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = \pm 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}, \quad N = 3$$

<풀이>

$x[n]$ 의 한 주기 신호  $x'[n]$ 의 DTFT는 정의식으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$X'(\Omega) = \sum_{n=-1}^1 x[n] e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} = 2\cos\Omega$$

따라서  $x[n]$ 의 DTFT는 (책)식 (10.19)에 의해 다음과 같이 구해진다.

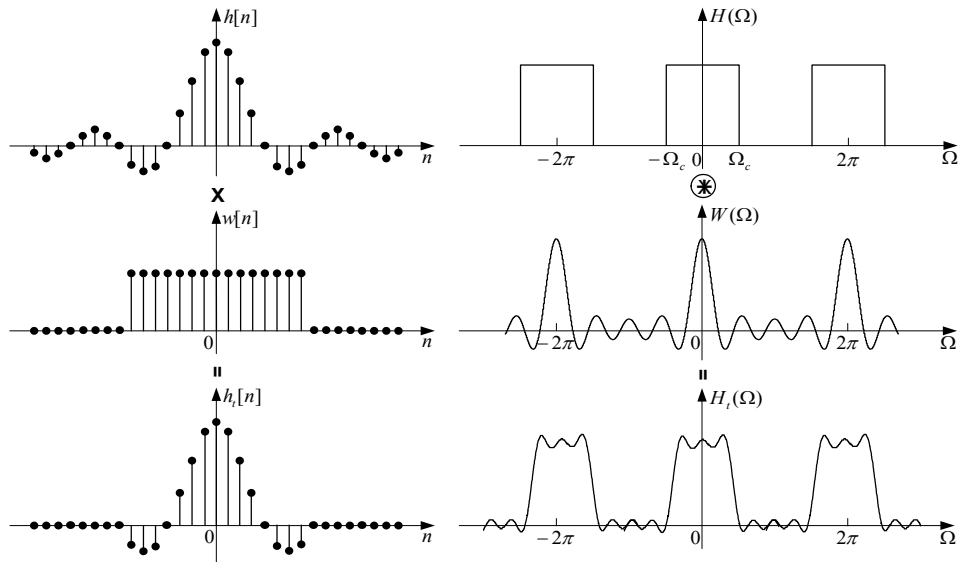
$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'(k\Omega_0) \delta(\Omega - k\Omega_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{3}k\right) \delta\left(\Omega - \frac{4\pi}{3}k\right) \end{aligned}$$

■

## 10.3 이산 시간 푸리에 변환의 성질

### 창 씌우기 정리

창 씌우기는 필터 설계에서 중요한 역할을 하므로 좀 더 상세히 알아보자. (책)[그림 10-12]의  $H(\Omega)$ 는 이상적인 저역 통과 필터의 주파수 응답이고 이를 IDTFT한 신호  $h[n]$ 은 필터의 임펄스 응답으로서 (책)[예제 10-5]에서 구한 것처럼 sinc 함수이다.



(책)[그림 10-12] 창 씌우기가 스펙트럼에 미치는 효과(주파수 컨벌루션)

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (C10.1)$$

$$h[n] = \frac{1}{\pi n} \sin(\Omega_c n) = 2F_c \text{sinc}(2F_c n) \quad (C10.2)$$

그런데  $h[n]$ 은 무한개의 샘플로 이루어져 있을 뿐만 아니라 비인과적이므로 물리적으로 만들 수 있는 필터가 아니다. 따라서 현실적인 대안은  $h[n]$ 을 손실이 크지 않는 범위에서 적당히 잘라내고, 이를 시간 이동시켜 인과 신호로 만드는 것이다. 이때 임펄스 응답을 잘라내는 작업이 (책)[그림 10-12]에 보인 것처럼 다음과 같은 창 함수를 곱하는 동작이다.

$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq L \\ 0, & |n| > L \end{cases} \quad (C10.3)$$

잘려진 임펄스 응답  $h_t[n] = h[n]w[n]$ 에 주파수 컨벌루션 성질을 적용하면

$$H_t(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} H(\theta) W(\Omega - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} W(\Omega - \theta) d\theta \quad (C10.4)$$

이다. 즉,  $H_t(\Omega)$ 는  $|\theta| \leq \Omega_c$ 에서  $W(\Omega - \theta)$ 의 면적이다.

(책)식 (10.31)과 (책)[예제 10-4]의 (책)[그림 10-6]에서 볼 수 있듯이 창 함수  $w[n]$ 의 DTFT  $W(\Omega)$ 는 sinc 함수와 비슷한 모양으로 대부분의 에너지가 몰려 있는 주엽<sup>main lobe</sup>과 상대적으로 작은 진동<sup>ripple</sup>들이 모인 부엽<sup>side lobe</sup>으로 이루어져 있다.

$W(\theta)$ 를 뒤집어( $W(-\theta)$ ) 오른쪽으로 이동시키면, 부엽의 작은 진동 중에서 주엽에 가까이 있는 크기가 큰 것들이 적분 구간 경계  $\Omega_c$ 를 통과하여 빠져나가고, 대신에 주엽에서 멀리 있는 상대적으로 크기가 작은 것들이 경계  $-\Omega_c$ 를 거쳐 적분 구간에 추가되어 들어온다. 이동 거리  $\Omega$ 가 커짐에 따라 빠져나가는 작은 진동들의 크기는 점점 커지고 들어오는 것들의 크기는 점점 작아진다. 따라서 적분되는 면적, 즉  $H_t(\Omega)$ 의 값의 변화는 주로 빠져나가는 것들에 의해 영향을 받게 된다.

양의 진동 부분이 경계를 빠져나가면 면적이 감소하고, 음의 진동들이 빠져나가면 면적은 증가하여  $H_t(\Omega)$ 에도 유사한 진동이 만들어지게 된다.  $\Omega$ 가  $\Omega_c$ 에 가까워지면 주엽이 경계를 이탈하기 시작하여 면적이 급격하게 줄어들게 된다. 주엽이 적분 구간을 다 빠져나가더라도 부엽의 작은 진동들이 남아 있기 때문에  $H_t(\Omega)$ 에는 값은 매우 작지만 추가적인 진동들이 생긴다. 따라서  $H_t(\Omega)$ 는 (책)[그림 10-12]의 오른쪽 열 마지막에 보인 형태와 같이 된다.

지금까지 살펴본 것처럼, 필터의 물리적 구현을 위해 어쩔 수 없이 이상적인 저역 통과 필터의 임펄스 응답을 잘라내면, 그 대가로 주파수 영역에서 통과 대역과 저지 대역에 작은 진동이 발생하고 천이 대역의 폭이 넓어진다.

#### ■ 예제 C10-6 : 선형성을 이용한 DTFT 구하기

선형성을 이용하여 신호  $x[n] = a^{|n|}$ ,  $|a| < 1$ 의 DTFT를 구하라.

<풀이>

주어진 신호는 다음과 같이 정의되는  $x_1[n]$ 과  $x_2[n]$ 의 합  $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ 으로 나타낼 수 있다. 그러므로 DTFT는 선형성에 의해  $X(\Omega) = X_1(\Omega) + X_2(\Omega)$ 가 된다.

$$x_1[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, \quad x_2[n] = \begin{cases} a^{-n}, & n < 0 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

$x_1[n]$ 의 DTFT는 (책)식 (10.30)과 같고,  $x_2[n]$ 의 DTFT는 정의식으로부터 다음과 같다.

$$X_2(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\Omega n} = \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{j\Omega})^m = \frac{ae^{j\Omega}}{1 - ae^{j\Omega}}$$

따라서  $x[n]$ 의 DTFT는 다음과 같이 된다.

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} + \frac{ae^{j\Omega}}{1 - ae^{j\Omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}$$

즉, 다음과 같이 DTFT쌍이 성립한다.

$$x[n] = a^{|n|}, |a| < 1 \Leftrightarrow \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2} \quad (\text{C10.5})$$

■

### ■ 예제 C10-7 : 시간 총합의 DTFT

다음과 같은 신호에 대한 시간 총합의 DTFT를 구하라.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

#### <풀이>

시간 총합은 적분에 대한 이산 시간의 상대적인 개념이라고 할 수 있다. 임펄스 함수의 성질((책)식 (3.26))을 이용하면 위 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[k - m]$$

$y[n]$ 에 이를 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[k - m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{k=-\infty}^n \delta[k - m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^n x[m] u[n - m] = x[n] * u[n] \end{aligned}$$

다시 말해,  $x[n]$ 의 시간 총합은  $x[n]$ 과  $u[n]$ 의 컨벌루션으로 생각할 수 있다. 따라서 시간 컨벌루션 성질을 적용하여 DTFT를 구하면

$$Y(\Omega) = X(\Omega) U(\Omega) = X(\Omega) \left( \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \delta(\Omega) \right), \quad |\Omega| \leq \pi$$

이다. 즉 다음과 같은 DTFT쌍이 성립한다.

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \Leftrightarrow X(\Omega) \left( \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \delta(\Omega) \right), \quad |\Omega| \leq \pi \quad (\text{C10.6})$$

■

■ 예제 C10-8 : 파스발의 정리를 이용한 싱크 함수의 에너지

$x[n] = \text{sinc}(\frac{1}{2}n)$ 의 에너지를 구하라.

<풀이>

$x[n]$ 의 에너지는 다음과 같이 계산할 수 있지만

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{sinc}(\frac{1}{2}n)|^2$$

(책)식 (10.32)의 푸리에 변환쌍과 파스발의 정리를 이용하면 보다 간단하게 구할 수 있다.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{sinc}(\frac{1}{2}n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |2\text{rect}(\Omega/\pi)|^2 d\Omega = \frac{4}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 d\Omega = 2$$

■

## 10.4 DTFT에 의한 이산 시스템 해석

### ■ 예제 C10-9 : IIR 시스템의 주파수 응답

다음과 같이 무한 임펄스 응답을 갖는 시스템의 주파수 응답을 구하라.

$$h[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1] + 0.25\delta[n-2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k \delta[n-k]$$

<풀이>

$h[n]$ 은 실수 지수 신호  $(0.5)^n u[n]$ 과 같다. 이를 직접 DTFT하면 다음과 같이 주파수 응답이 구해진다.

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

또한, 이와 다른 방법으로 주파수 응답을 구할 수도 있다. 다음 관계를 이용하면

$$h[n-1] = \delta[n-1] + 0.5\delta[n-2] + 0.25\delta[n-3] + \dots$$

임펄스 응답을 다음과 같이 차분 방정식 형태로 변환할 수 있다.

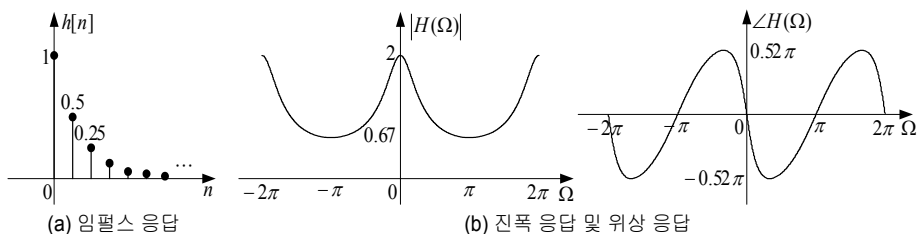
$$h[n] = 0.5h[n-1] + \delta[n]$$

이를 DTFT하게 되면

$$H(\Omega) = 0.5e^{-j\Omega} H(\Omega) + 1$$

가 된다. 이를 정리하면  $h[n]$ 을 직접 DTFT한 것과 같은 결과를 얻는다.

이 시스템의 임펄스 응답과 주파수 응답을 [그림 C10-6]에 보였다. 임펄스 응답이 실수 신호이므로 그림에서 보듯이 진폭 응답은 우대칭, 위상 응답은 기제칭을 만족하며, 이러한 대칭성이  $\Omega = \pi$ 의 대칭축에 대해서도 성립한다. ■



[그림 C10-6] [예제 C10-9]의 IIR 시스템의 임펄스 응답과 주파수 응답

■ 예제 C10-10 : DTFT를 이용한 임펄스 응답 구하기

다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

<풀이>

시간 이동 성질을 이용하여 DTFT를 구하면 다음과 같이 주파수 응답을 얻는다.

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

부분 분수로 전개하면

$$H(\Omega) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

이고, 이를 IDTFT하여 다음의 임펄스 응답을 얻는다.

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

■

## 10.5 푸리에 표현의 상호 관계

푸리에 해석 기법은 실제로 발생하게 되는 다양한 신호들에 대해 주파수 영역에서 분석하고 필요한 정보를 이끌어 낼 수 있게 해준다. 하지만 신호의 형태에 따라 완전히 서로 다른 푸리에 표현이 존재한다고 받아들여서 푸리에 표현이 너무 많아 혼란스러울 뿐만 아니라 어렵고 힘들기까지 하다고 느낄 수도 있다. 이것은 어느 정도 사실일 수도 있지만, 실제로는 생각하는 것만큼 그런 것은 아니다.

6장, 7장, 그리고 10장에서 지금까지 살펴본 네 가지의 푸리에 표현 FS, FT, DTFS, DTFT는 정의들이 외형적으로 다르고 용어에 드러나 있지 않은 미묘한 차이를 이해하는 것이 중요하기는 하지만, 푸리에 표현의 기본 구조는 모두 똑같다. 신호는 주파수와 일대일 대응 관계에 있는(복소) 정현파 신호의 가중합으로 표현된다. 즉, 신호는 주파수 변수를 가진 복소 정현파 신호에 의하여 곱해진 다음, 시간 변수가 이산인지 연속인지에 따라 더해지거나 적분된다. 그렇기 때문에 서로 다른 푸리에 표현들의 기본적인 성질은 매우 비슷할 수밖에 없다. 예를 들면, 시간 영역의 컨벌루션은 항상 주파수 영역에서 곱셈을 의미하고, 시간 영역에서 시간 지연은 항상 주파수 영역에서 위상 스펙트럼의 변화를 가져오게 된다.

### 10.5.1 푸리에 표현의 요약

#### (1) 연속 시간 푸리에 급수(FS)

FS는 연속 주기 신호에 적용된다. 기본 주파수의 정수 배인 무한개의 연속 복소 정현파 신호들의 가중합으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 이산 비주기 함수가 된다.

#### (2) 연속 시간 푸리에 변환(FT)

FT는 연속 비주기 신호에 적용된다. 주파수가  $-\infty$ 에서  $\infty$ 까지 연속적으로 변하는 연속 복소 정현파 신호들의 가중 적분으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 연속 비주기 함수가 된다.

#### (3) 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)

DTFS는 이산 주기 신호(주기  $N$ )에 적용된다. 기본 주파수의 정수 배인  $N$ 개의 이산 복소 정현파 신호들의 가중 합으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 이산 주기 함수(주기  $N$ )이다.

#### (4) 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)

DTFT는 이산 비주기 신호에 적용된다. 주파수가  $2\pi$  범위(한 주기 구간)내에서 연속적으로 변하는 이산 복소 정현파 함수들의 가중적분으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 연속 주기 함수(주기  $2\pi$ )이다.

## 10.5.2 푸리에 표현들의 관계

### (1) FS와 FT

FT를 소개하면서, 비주기 신호  $x(t)$ 는 주기 신호  $x_T(t)$ 의 주기  $T$ 가 무한대인 경우로, 또는 주기 신호  $x_T(t)$ 는 비주기 신호  $x(t)$ 를 주기  $T$ 로 반복시킨 것으로 취급하여 논의를 전개하였다. 전자의 접근은 주기 신호의 이산 스펙트럼으로부터 비주기 신호의 스펙트럼이 연속 함수가 된다는 것을, 후자의 접근은 비주기 신호의 연속 스펙트럼의 샘플링 효과에 의해 주기 신호의 스펙트럼이 이산 함수가 된다는 결과를 끌어낼 수 있게 하였다.

결론적으로, 주기 신호의 스펙트럼  $X_k$ 는 비주기 신호의 푸리에 변환  $X(\omega)$ 을 기본 주파수의 간격으로 샘플링하여 그 크기를 주기로 나눈 것과 같다.

$$X_k = \frac{1}{T} X(k\omega_0) \quad (\text{C10.7})$$

### (2) DTFS와 DTFT

비주기 신호  $x[n]$ 에 대한 DTFT를 유도하면서 주기 신호  $x_N[n]$ 의 DTFS의 주기를 무한대로 접근시키는 형태로 확장하여 결과를 얻었다. 이를 다시 쓰면,

$$X_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \quad (\text{C10.8})$$

$X(\Omega)$ 의 샘플값을 취하여 크기를 주기로 나눈 것과 같다. 이는 바로 앞에서 살펴본 FS와 FT의 관계와 동일하다. 이로부터 연속 시간이든 이산 시간이든 상관없이 **주기 신호는 이산 스펙트럼을 가지고 비주기 신호는 연속 스펙트럼을 가지며, 주기 신호의 스펙트럼은 비주기 신호의 스펙트럼의 샘플 값에 대응된다**는 결론을 얻을 수 있다.

### (3) FS와 DTFS, FT와 DTFT

이산 신호는 연속 신호를 샘플링한 것으로 생각할 수 있다. 이미 9장에서 연속 신호를 샘플링하여 이산 신호로 만들면 이 신호의 스펙트럼은 샘플링 주파수 간격마다 연속 신호의 스펙트럼을 반복하게 된다는 사실을 알았다. 따라서 주기 신호이든 비주기 신호이든 상관없이 **연속 신호의 스펙트럼은 비주기적이고 이산 신호의 스펙트럼은 주기 함수가 된다.**

## 10.5.3 푸리에 해석의 주요 사항

푸리에 해석에서 반드시 그 개념과 성질을 잘 이해하고 알아두어야 할 몇 가지 주요 사항들을 정리하였다. 관련된 내용들을 복습하면서 잘 익혀두기 바란다.

[표 C10-1] 푸리에 해석의 주요 사항 요약

주요 사항
<ul style="list-style-type: none"> <li>시간 영역에서 주기 신호는 주파수 영역에서 이산 스펙트럼을 갖는다.</li> <li>시간 영역에서 비주기 신호는 주파수 영역에서 연속 스펙트럼을 갖는다.</li> <li>시간 영역에서 연속 신호는 주파수 영역에서 비주기 스펙트럼을 갖는다.</li> <li>시간 영역에서 이산 신호는 주파수 영역에서 주기 스펙트럼을 갖는다.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>시간 영역에서 길이가 유한한 신호의 스펙트럼은 전 주파수 범위에서 값을 갖는다. 즉, 주파수 영역에서 대역 제한되지 않는다.</li> <li>전 시간 범위에서 값을 갖는 신호의 스펙트럼은 유한한 주파수 범위에서만 값을 갖는다. 즉, 주파수 영역에서 대역 제한된다.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>시간 축 상에서 신호를 늘이면 스펙트럼은 주파수 축 상에서 압축된다.</li> <li>시간 축 상에서 신호를 압축하면 스펙트럼은 주파수 축 상에서 늘어난다.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>시간 영역에서 신호를 시간 지연(선행)시키면 진폭 스펙트럼은 변화가 없고, 위상 스펙트럼만 시간 지연에 비례하여 선형적으로 감소(증가)한다.</li> <li>시간 영역에서 신호 파형의 변화가 느리고 매끄러울수록 진폭 스펙트럼은 급격히 감소한다.</li> <li>시간 영역에서 신호 파형이 급격히 변화할수록 스펙트럼은 더 높은 주파수 성분을 포함한다.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>시간 영역에서 신호가 <math>t=0(n=0)</math>의 수직축을 중심으로 우대칭이면 위상 스펙트럼은 0 또는 <math>\pm\pi</math>이 된다.</li> <li>시간 영역에서 신호가 임의의 수직축을 중심으로 우대칭을 만족하면 위상 스펙트럼은 선형이 된다.</li> <li>시간 영역에서 신호가 <math>t=0(n=0)</math>의 수직축을 중심으로 기대칭이면 위상 스펙트럼은 <math>\pm\frac{\pi}{2}</math>이 된다.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>시간 영역에서 두 신호의 컨벌루션은 주파수 영역에서 스펙트럼의 곱으로 나타난다.</li> <li>시간 영역에서 두 신호의 곱은 주파수 영역에서 스펙트럼의 컨벌루션으로 나타난다.</li> <li>시간 영역에서 구한 신호의 에너지(전력)는 주파수 영역에서 구한 에너지(전력)와 같고, 이때 서로 다른 주파수 성분끼리는 에너지를 형성하지 않는다(파스발의 정리).</li> </ul>