

라플라스 변환

책의 ‘1절 라플라스 변환의 개요’와 관련하여 역 라플라스 변환의 정의식의 유도와 라플라스 변환의 물리적 의미에 대한 보충 설명을 추가하였다.

책의 ‘3절 라플라스 변환의 성질’과 관련하여 몇몇 성질에 대한 예와 주파수 적분 및 주파수 컨벌루션에 대한 설명을 추가하였다. 이를 통해 보다 확실하게 라플라스 변환의 성질을 이해할 수 있을 것이다.

책의 ‘4절 역 라플라스 변환’과 관련하여 부분분수 전개 항들의 계수를 결정하는 헤비사이드의 커버업 기법의 관계식 유도에 관한 보충 설명과 보다 간편하게 계수를 계산하고 역 변환할 수 있는 팁들을 Note 형태로 제시하였다.

책의 ‘5절 라플라스 변환에 의한 미분방정식 해석’과 관련하여 이해를 도울 수 있는 예제를 추가하였고, 라플라스 변환을 이용한 전기회로 해석에 대해 소절을 추가하여 라플라스 변환의 활용에 익숙해지도록 하였다.

마지막으로 ‘양방향 라플라스 변환’과 관련한 절을 별도로 추가하여 비인과 신호의 취급에 대해서도 어려움 없이 대처할 수 있도록 하였다.

8.1 라플라스 변환의 개요

8.1.1 라플라스 변환의 개념과 정의

(책)식 (8.3)과 같이 수렴 인자($e^{-\sigma t}$)가 곱해진 신호에 대한 푸리에 변환으로 라플라스 변환을 생각할 수 있었던 것처럼, 역 라플라스 변환의 정의식 (책)식 (8.6)은 역 푸리에 변환의 정의식으로부터 간단히 유도할 수 있다.

(책)식 (8.3)에서 $X(s) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$ 이므로 이의 역 푸리에 변환은 다음과 같이 된다.

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{j\omega t} d\omega \quad (C8.1)$$

$s = \sigma + j\omega$ 이므로 $j\omega = s - \sigma$, $ds = jd\omega$ 를 위 식에 대입하여 정리하면

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - \infty}^{\sigma + \infty} X(s)e^{(s - \sigma)t} ds = \frac{e^{-\sigma t}}{2\pi j} \int_{\sigma - \infty}^{\sigma + \infty} X(s)e^{st} ds \quad (C8.2)$$

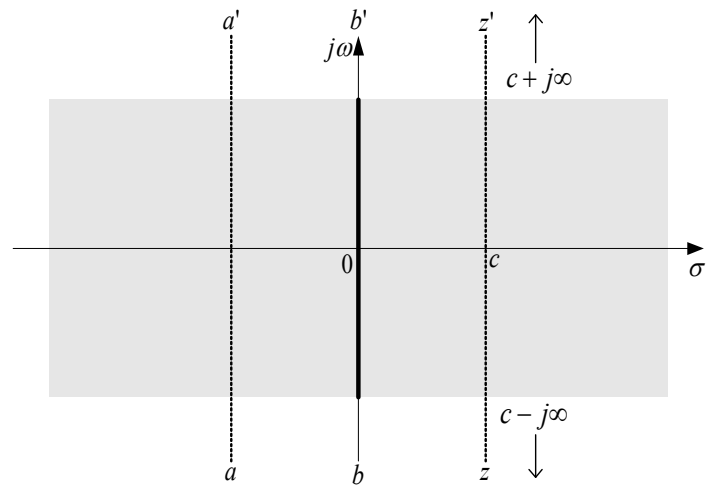
양변을 $e^{-\sigma t}$ 로 나누면 다음과 같이 역 라플라스 변환의 정의식이 얻어진다.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - \infty}^{\sigma + \infty} X(s)e^{st} ds \quad (C8.3)$$

라플라스 변환의 물리적 의미

6장과 7장의 푸리에 해석에서, 푸리에 급수는 주기 신호를 $e^{jk\omega_0 t}$ 형태의 스펙트럼 성분의 합으로, 푸리에 변환은 비주기 신호를 $e^{j\omega t}$ 형태의 스펙트럼 성분의 합으로 표현하는 신호에 대한 다른 표현법(변환)임을 배웠다. 라플라스 변환은 푸리에 변환의 개념을 확장한 것이므로 신호를 e^{st} 형태의 스펙트럼 성분의 합으로 나타내는 도구라고 할 수 있다. 하지만 푸리에 변환과는 달리 $s = \sigma + j\omega$ 가 복소주파수이므로 식 (C8.3)의 역변환의 경로 선정에 따라 스펙트럼의 표현 방법이 달라진다. 즉 스펙트럼이 계산되는 복소주파수가 다르다.

식(C8.3)의 적분을 위한 적분 경로는 $X(s)$ 의 수렴영역 내의 $c - j\infty$ 에서 $c + j\infty$ 까지의 어떤 경로라도 가능하다. [그림 C8-1]에 가능한 경로의 예를 3가지 보였다. 경로 aa' 는 s -평면의 좌반면 내의 복소주파수 형태의 지수함수를 표현한다. 그러므로 이 경로를 선택하면 지수적으로 감소하는 정현파를 스펙트럼으로 표현하게 된다. zz' 는 우반면에 있으므로 지수함수적으로 증가하는 정현파를, bb' 경로는 허축에 있으므로 일정한 진폭의 정현파를 스펙트럼 표현하게 된다.



[그림 C8-1] 역 라플라스 변환의 적분 경로

8.3 라플라스 변환의 성질

8.3.4 시간 척도 조절

재미있는 예로 계단 신호 $u(t)$ 를 시간 척도 조절한 $u(\alpha t)$ 를 생각해보자. 계단 신호는 시간 축에서 아무리 줄이거나 늘이더라도 그냥 계단 신호가 된다. 즉, 어떠한 $\alpha > 0$ 에 대해서도 $u(\alpha t) = u(t)$ 이다. 그런데 (책)식 (8.26)으로부터 $\mathcal{L}\{u(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{s/\alpha} = \frac{1}{s}$ 가 되어 계단 신호의 라플라스 변환이 결과로 얻어진다. 따라서 $u(\alpha t) = u(t)$ 라는 것을 확인할 수 있다.

8.3.5 시간 미분

■ 예제 C8-1 : 시간 미분 성질을 이용한 라플라스 변환

신호 $x(t) = \cos^2(\omega_0 t)u(t)$ 의 라플라스 변환을 시간 미분 성질을 이용하여 구하라.

<풀이>

$x(t)$ 를 미분하면

$$\dot{x}(t) = -2\omega_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) u(t) = -\omega_0 \sin(2\omega_0 t) u(t)$$

사인파의 라플라스 변환쌍과 미분 성질을 이용하여 위 식을 라플라스 변환하면

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-) = sX(s) = -\frac{2\omega_0^2}{s^2 + (2\omega_0)^2}$$

이를 $X(s)$ 에 관해 정리하면 다음과 같이 $x(t)$ 의 라플라스 변환이 구해진다.

$$X(s) = -\frac{2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)} \quad \blacksquare$$

8.3.8 시간 컨벌루션

이 성질의 활용 예로 시간 적분 성질의 증명을 들 수 있다. $x(t)$ 의 시간 적분은 $x(t)$ 와 계단 신호 $u(t)$ 의 컨벌루션과 같다. 즉, $x(t) * u(t) = \int_0^\infty x(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)d\tau$ 이다. 따라서 시간 컨벌루션 성질에 의해 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{x(t) * u(t)\} = X(s)U(s) = \frac{1}{s}X(s)$ 을 얻어 시간 적분 성질을 간단히 증명할 수 있다.

8.3.11 주파수 적분

라플라스 변환은 시간 적분 성질에 대응되는 성질로서 다음과 같은 주파수 적분 성질을 만족한다.

$$\frac{1}{t}x(t) \Leftrightarrow \int_s^\infty X(s')ds' \quad (\text{C8.4})$$

이는 식 (C8.4)의 우변의 주파수 적분을 다음과 같이 변형하여 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_s^\infty X(s')ds' &= \int_s^\infty \left[\int_0^\infty x(t)e^{-s't}dt \right] ds' = \int_0^\infty x(t) \left[\int_s^\infty e^{-s't}ds' \right] dt \quad (\text{C8.5}) \\ &= \int_0^\infty x(t) \left[-\frac{1}{t}e^{-s't} \Big|_s^\infty \right] dt = \int_0^\infty \frac{1}{t}x(t)e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{t}x(t) \right\} \end{aligned}$$

8.3.12 주파수 컨벌루션

시간 컨벌루션에 대한 쌍대 관계로서 다음과 같은 주파수 컨벌루션 성질이 만족된다.

$$x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}X_1(s) * X_2(s) \quad (\text{C8.6})$$

즉 복소주파수 영역에서의 두 함수의 컨벌루션은 시간 영역에서의 곱으로 변환된다. 물론 그 역도 성립한다.

8.4 역 라플라스 변환

8.4.2 단순극에 대한 부분분수 전개

헤비사이드의 커버업 기법에 의한 부분분수 항의 계수 계산식을 유도해보자. 단순극의 경우에 해당하는 (책)식 (8.48)을 구하기 위해 먼저 (책)식 (8.47)의 양변에 $(s - p_i)$ 를 곱하면

$$(s - p_i)X(s) = K_1 \frac{s - p_i}{s - p_1} + \cdots + K_i \frac{s - p_i}{s - p_i} + \cdots + K_n \frac{s - p_i}{s - p_n} \quad (\text{C8.7})$$

이 된다. 식 (C8.7)에서 보면, 우변의 i 번째 부분분수 항은 분모, 분자 사이에 약분이 일어나서 K_i 만 남고 나머지 항들은 모두 분자에 $(s - p_i)$ 항을 포함하고 있다. 따라서 식 (C8.7)의 양변에 $s = p_i$ 를 대입하면, K_i 를 제외한 나머지 계수 항들은 모두 0이 된다.

$$(s - p_i)X(s)|_{s=p_i} = K_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n K_j \frac{s - p_i}{s - p_j} \Big|_{s=p_i} = K_i \quad (\text{C8.8})$$

8.4.3 다중극에 대한 부분분수 전개

(책)식 (8.51)의 다중극에 대한 부분분수 항 계수 계산 관계는 다음 과정을 통해 증명할 수 있다. 먼저 (책)식 (8.50)의 양변에 $(s - p_1)^r$ 을 곱하면

$$\begin{aligned} & (s - p_1)^r X(s) \Big|_{s=p_1} \quad (\text{C8.9}) \\ &= K_{1r} + [K_{11}(s - p_1)^{r-1} + \cdots + K_{1r-1}(s - p_1)] \Big|_{s=p_1} + (s - p_1)^r R(s) \Big|_{s=p_1} \end{aligned}$$

가 된다. 식 (C8.9) 우변의 세 번째 항 $(s - p_1)^r R(s) \Big|_{s=p_1}$ 은 $r-1$ 번 미분 때까지는 0이므로, 식 (C8.9)를 1차부터 시작하여 $r-1$ 차까지 미분하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} [(s - p_1)^r X(s)] \Big|_{s=p_1} \quad (\text{C8.9}) \\ &= K_{1r-1} + \{K_{11}(r-1)(s - p_1)^{r-2} + \cdots + K_{1r-2}2(s - p_1)\} \Big|_{s=p_1} \\ & \quad \frac{d^2}{ds^2} [(s - p_1)^r X(s)] \Big|_{s=p_1} \\ &= 2K_{1r-2} + \{K_{11}(r-1)(r-2)(s - p_1)^{r-2} + \cdots + K_{1r-2}3 \cdot 2(s - p_1)\} \Big|_{s=p_1} \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} [(s-p_1)^r X(s)] \right|_{s=p_1} \\
&= (r-j)! K_{1j} + \left\{ K_{11}(r-1) \cdots (r-j)(s-p_1)^{j-1} + \cdots \right. \\
& \quad \left. + K_{1j-1}(r-j+1) \cdots 2(s-p_1) \right\} \Big|_{s=p_1} \\
& \quad \vdots \\
& \left. \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s-p_1)^r X(s)] \right|_{s=p_1} = (r-1)! K_{11}
\end{aligned}$$

이로부터 (책)식 (8.51)의 관계를 얻게 된다.

<Note> 분수 소거법과 속산법에 의한 계수 간편 계산

다중극에 대한 계수 결정식 (책)식 (8.51)을 모르거나 미분 때문에 까다롭다고 느껴질 경우에는 분수 소거법이나 속산법을 이용하면 간편하게 문제를 해결할 수 있다.

[예제 8-10]의 $X(s)$ 를 부분분수 전개한 식에서, 계수를 계산할 때 미분이 요구되지 않는 부분분수 항의 계수(K_{13} , K_4)를 먼저 구하여 대입한 다음, 부분분수 전개식의 좌변에 분자항만 남기고 분모항을 우변에 곱하면 다음과 같이 된다.

$$8s + 10 = K_{11}(s+1)(s+2)^2 + K_{12}(s+1)(s+2) + 6(s+1) + 2(s+2)^3 \quad (\text{C8.10})$$

식 (C8.10)의 우변을 정리하여 계수를 비교하면 미결정 계수 K_{11} , K_{12} 에 대한 연립 방정식이 얻어지므로 이를 풀어 계수를 구할 수 있다. 이를 **분수 소거법**이라 한다. 그런데 미지 계수 항이 많을 경우에는 이와 같이 식 (C8.10)을 그대로 정리, 비교하여 연립 방정식을 얻는 것보다 $s = -1$, -2 이 아닌 적절한 s 값을 대입하는 쪽이 계산이 간편하다. 이러한 방법을 **속산법**이라고 한다. 이 예에서는 식 (C8.10)의 양변을 최고차 항인 s^3 으로 나눈 뒤 $s \rightarrow \infty$ 의 극한을 취하면 $2 + K_{11} = 0$ 이 얻어져서 $K_{11} = -2$ 로 구해진다. 마지막으로 K_{12} 를 구하기 위해 식 (C8.10)의 양변에 적당한 값, 예를 들어 $s = 0$ 을 대입하면 $10 = (-2)4 + 2K_{12} + 6 + 16$ 이 되고, 이를 정리하면 $K_{12} = -2$ 가 얻어진다. 이처럼 단순극에 대한 (책)식 (8.48)의 헤비사이드 커버업 기법에 분수 소거법 및 속산법을 섞어 쓰면 함수에 대한 미분을 하지 않고서도 다중극 부분분수들의 계수를 구할 수 있다. 그러나 이는 어디까지나 계산의 편의를 위해 기교를 부린 것에 지나지 않는다. 되도록 (책)식 (8.51)에 익숙해지도록 노력하는 것이 바람직하다.

8.4.4 공액 복소극에 대한 부분분수 전개

$X(s)$ 가 공액 복소극을 갖는 경우에는 2차 인수를 포함하는 형태로 전개하면 번거로운 복소수 계산을 피하고 보다 간편하게 역 변환을 계산할 수 있다.

<Note> 공액 복소극에 대한 간편 역 변환

$X(s)$ 가 공액 복소극을 갖는 경우 (책)식 (8.53)처럼 전개하면 복소수 계산이 복잡하므로, 다음과 같이 2차 인수를 포함하는 형태로 전개하면 보다 간편하게 계산할 수 있다.

$$X(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \dots + \frac{K_{n-2}}{s-p_{n-2}} + \frac{As+B}{s^2-2\alpha s+\alpha^2+\beta^2} \quad (C8.11)$$

식 (C8.11)의 2차 인수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{As+B}{s^2-2\alpha s+\alpha^2+\beta^2} = \frac{A(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{C\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \quad (C8.12)$$

코사인 및 사인 함수의 변환쌍과 주파수 이동 성질을 이용하여 역 라플라스 변환할 수 있고, 삼각함수 합성 공식을 적용하면 최종적으로 (책)식 (8.55)과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As+B}{s^2-2\alpha s+\alpha^2+\beta^2}\right\} &= Ae^{\alpha t}\cos(\beta t) + Ce^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ &= \sqrt{A^2+C^2}e^{\alpha t}\cos(\beta t - \tan^{-1}\frac{C}{A}) \end{aligned} \quad (C8.13)$$

[예제 8-11]의 경우에 $X(s)$ 를 식 (C8.11)처럼 2차 인수를 포함하는 형태로 전개하면

$$X(s) = \frac{4(s+1)^2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{As+B}{s^2+2s+2} = \frac{2}{s} + \frac{As+B}{s^2+2s+2} \quad \dots \textcircled{1}$$

분수 소거법에 의해 $s(s^2+2s+2)$ 를 식 ① 양변에 곱하여 정리하면 다음과 같고,

$$4(s+1)^2 = 2(s^2+2s+2) + s(As+B) = (2+A)s^2 + (4+B)s + 4$$

양변의 계수를 비교해 $A=2$, $B=4$ 를 얻는다. 따라서 역 변환은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{2s+4}{s^2+2s+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{2(s+1)+2\cdot 1}{(s+1)^2+1^2}\right\} \\ &= 2 + 2e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t = 2 + 2\sqrt{2}e^{-t}\cos(t-45^\circ) \end{aligned}$$

[예제 8-11]과 같은 결과를 얻지만 복소수 계산이 없으므로 좀 더 간편하다.

8.5 라플라스 변환에 의한 미분방정식 해석

■ 예제 C8-2 : 라플라스 변환을 이용한 미분방정식의 풀이

다음의 미분방정식으로 표현되는 LTI 시스템의 응답을 라플라스 변환을 이용하여 구하라.

입력은 $x(t) = e^{-4t}u(t)$ 이고, 초기조건은 $y(0^-) = 2$, $\dot{y}(0^-) = 1$ 이다.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

<풀이>

주어진 미분방정식을 라플라스 변환하면

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) + 5s Y(s) - 5y(0^-) + 6 Y(s) = sX(s) + X(s)$$

이 되므로, 이를 $Y(s)$ 에 대해 정리하면 다음과 같이 된다.

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = y(0^-)s + \dot{y}(0^-) + 5y(0^-) + sX(s) + X(s)$$

주어진 초기조건을 대입한 뒤, 위 식을 $Y(s)$ 에 대해서 풀면 다음과 같이 된다.

$$Y(s) = \frac{2s + 11}{s^2 + 5s + 6} + \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \frac{s + 1}{s + 4}$$

위 식의 우변의 첫 번째 항은 초기조건에 의한 응답이고, 두 번째 항은 입력에 의한 응답이다. 또한 두 항 모두 분모에 $s^2 + 5s + 6$ 의 공통인수를 가지고 있는데, 미분방정식의 특성다항식과 동일하므로 이의 부분분수 전개에 의해 시스템 모드 항들이 얻어질 것이라 예상할 수 있다.

i) 고유 응답 + 강제 응답

$Y(s)$ 의 우변의 첫째 항과 둘째 항은 공통의 인수를 분모에 가지고 있으므로 다음과 같이 합쳐서 3개의 항으로 부분분수 전개할 수 있다.

$$Y(s) = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{s+4} = \frac{6.5}{s+2} - \frac{3}{s+3} - \frac{1.5}{s+4}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= (s+2)Y(s) \Big|_{s=-2} = 6.5 \\ K_2 &= (s+3)Y(s) \Big|_{s=-3} = -3 \\ K_3 &= (s+4)Y(s) \Big|_{s=-4} = -1.5 \end{aligned}$$

위의 $Y(s)$ 를 역 라플라스 변환하면 다음과 같이 시스템의 응답이 얻어진다.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6.5}{s+2} - \frac{3}{s+3} - \frac{1.5}{s+4} \right\} = \underbrace{[6.5e^{-2t} - 3e^{-3t}]}_{\text{고유 응답}} + \underbrace{[-1.5e^{-4t}]}_{\text{강제 응답}}$$

ii) 영입력 응답 + 영상태 응답

$Y(s)$ 의 우변의 첫 번째 항은 초기조건에 의한 것이므로 영입력 응답이고, 두 번째 항은 입력에 의한 항이므로 영상태 응답에 해당한다. 이번에는 이 두 항에 대해 따로 부분분수 전개를 해보자.

$$Y(s) = \left[\frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3} \right] + \left[\frac{K_3}{s+2} + \frac{K_4}{s+3} + \frac{K_5}{s+4} \right]$$

$$K_1 = (s+2) \frac{2s+11}{s^2+5s+6} \Big|_{s=-2} = 7$$

$$K_2 = (s+3) \frac{2s+11}{s^2+5s+6} \Big|_{s=-3} = -5$$

$$K_3 = (s+2) \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)} \Big|_{s=-2} = -0.5$$

$$K_4 = (s+3) \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)} \Big|_{s=-3} = 2$$

$$K_5 = (s+4) \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)} \Big|_{s=-4} = -1.5$$

따라서 $Y(s)$ 는 다음과 같이 부분분수로 전개되고

$$Y(s) = \left[\frac{7}{s+2} - \frac{5}{s+3} \right] + \left[-\frac{0.5}{s+2} + \frac{2}{s+3} - \frac{1.5}{s+4} \right]$$

이를 역 변환하면 다음과 같이 시스템 응답이 구해진다.

$$y(t) = \underbrace{[7e^{-2t} - 5e^{-3t}]}_{\text{영입력 응답}} + \underbrace{[-0.5e^{-2t} + 2e^{-3t} - 1.5e^{-4t}]}_{\text{영상태 응답}}$$

두 가지 방법으로 구한 해가 서로 일치함을 쉽게 알 수 있다. ■

8.5.2 라플라스 변환을 이용한 전기회로 해석

라플라스 변환을 이용한 미분방정식의 풀이가 매우 유용한 대표적인 예로 전기회로를 들 수 있다. 미적분을 포함한 회로방정식을 라플라스 변환하면 s 에 대한 대수방정식으로 바뀌고 복소수 계산을 필요로 하지 않으므로 해석하기가 매우 간편해진다.

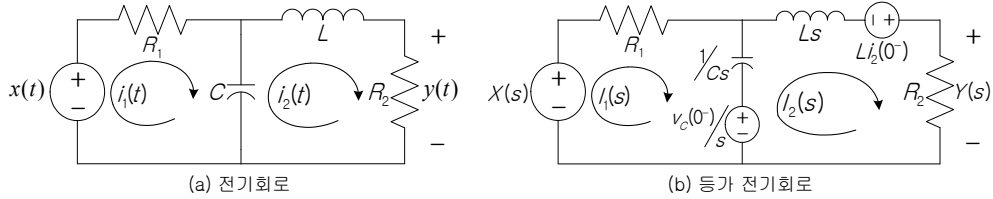
전기회로를 구성하는 저항, 인덕터, 커패시터 소자에 대한 전압 전류 관계식은 라플라스 변환에 의해 다음과 같이 된다(시간 미분 및 시간 적분 성질 적용).

$$\text{저항}(R) : v_R(t) = Ri(t) \Leftrightarrow V_R(s) = RI(s) \quad (\text{C8.14})$$

$$\text{인덕터}(L) : v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow LsI(s) - Li(0^-) \quad (\text{C8.15})$$

$$\text{커패시터}(C) : v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Leftrightarrow V_C(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{1}{s} v_C(0^-) \quad (\text{C8.16})$$

따라서 임피던스를 저항은 $Z_R(s) = R$, 인덕터는 $Z_L(s) = Ls$, 커패시터는 $Z_C(s) = 1/Cs$ 로 치환하여 전압 $V(s)$ 와 전류 $I(s)$ 에 대한 대수방정식을 세우면 된다. 또한 $t=0$ 이전의 회로 상태에 따른 초기 조건을 고려해야 한다면 식 (C8.15)와 식 (C8.16)을 이용하면 된다. 예를 들어, [그림 C8-2(a)]의 전기회로를 s 영역 등가 회로로 나타내면 [그림 C8-2(b)]와 같이 된다. 만약 초기조건이 0일 경우에는 해당되는 등가 전압원을 단락시키면 된다.



[그림 C8-2] 전기회로와 s 영역 등가 회로

[그림 8-8(a)] 폐로에 키르히호프 전압 법칙(KVL)을 적용하면 회로 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} R_1 i_1(t) + \frac{1}{C} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt = x(t) \\ -\frac{1}{C} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt + L \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{C8.17})$$

시간 영역에서는 이를 다시 적분이 없는 미분방정식으로 바꾸고 $i_1(t)$ 와 $i_2(t)$ 에 대해 연립 미분방정식을 풀어 $i_2(t)$ 를 구한 다음 회로의 출력력을 $y(t) = R_2 i_2(t)$ 로 구하게 된다.

이에 반해 식 (C8.17)을 라플라스 변환한 [그림 8-8(b)]의 등가 회로에 대한 s 영역 회로 방정식은 다음과 같이 $I_1(s)$ 와 $I_2(s)$ 에 대한 연립 대수방정식이 된다.

$$\begin{cases} R_1 I_1(s) + \frac{1}{Cs} (I_1(s) - I_2(s)) + \frac{1}{s} v_C(0^-) = X(s) \\ -\frac{1}{Cs} (I_1(s) - I_2(s)) - \frac{1}{s} v_C(0^-) + Ls I_2(s) - Li_2(0^-) + R_2 I_2(s) = 0 \end{cases} \quad (\text{C8.18})$$

이를 정리하면 다음과 같이 행렬 벡터 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{Cs} & -\frac{1}{Cs} \\ -\frac{1}{Cs} & \frac{1}{Cs} + Ls + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(s) - \frac{1}{s}v_C(0^-) \\ \frac{1}{s}v_C(0^-) + Li_2(0^-) \end{bmatrix} \quad (\text{C8.19})$$

이를 풀어 $I_2(s)$ 를 얻은 뒤 회로의 출력을 $Y(s) = R_2 I_2(s)$ 로 구하여 역 변환하면 $y(t)$ 가 얻어진다. 물론 간단한 행렬 계산만 요구되므로 이쪽이 훨씬 계산이 간편하다는 것을 알 수 있다.

■ 예제 C8-3 : 라플라스 변환을 이용한 회로 해석

[그림 8-8(a)]의 전기회로에서 $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $L = 1$, $C = 0.5$ 일 때 출력 전압 $y(t)$ 를 구하라. 단, 입력 전압은 $x(t) = 6u(t)$, 초기 조건은 $i_2(0^-) = 4$, $v_C(0^-) = 6$ 이다.

<풀이>

식 (C8.19)에 주어진 값들을 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \frac{2s+2}{s} & -\frac{2}{s} \\ -\frac{2}{s} & \frac{s^2+4s+2}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4s+6}{s} \end{bmatrix}$$

위 방정식의 계수 행렬(임피던스 행렬)의 행렬식 값은 다음과 같으므로

$$\Delta(s) = \frac{2s+2}{s} \frac{s^2+4s+2}{s} - \frac{2}{s} \frac{2}{s} = \frac{2(s^2+5s+6)}{s}$$

폐로 전류는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} \frac{s^2+4s+2}{s} & \frac{2}{s} \\ \frac{2}{s} & \frac{2s+2}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4s+6}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} \frac{4(2s+3)}{s^2} \\ \frac{4(s+1)(2s+3)}{s^2} \end{bmatrix}$$

구해진 $I_2(s)$ 로부터 $Y(s) = R_2 I_2(s)$ 를 계산하여 부분분수로 전개하면 다음과 같이 되고

$$Y(s) = R_2 I_2(s) = \frac{8(s+1)(2s+3)}{s(s+2)(s+3)} = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{16}{s+3}$$

이를 역 라플라스 변환하면 회로의 출력 전압 $y(t)$ 가 다음과 같이 구해진다.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{16}{s+3} \right\} = (4 - 4e^{-2t} + 16e^{-3t})u(t) \quad \blacksquare$$

■ 예제 C8-4 : 전기회로의 전달 함수

[예제 C8-3]의 전기회로의 전달 함수와 임펄스 응답을 구하라.

<풀이>

[예제 C8-3]의 풀이와 달리, 키르히호프의 전류 법칙(KCL)을 사용하여 C 마디에서 마디 방정식을 세워보자. 물론 [예제 C8-13]처럼 폐로방정식을 이용하여 풀어도 되지만 이 방법이 좀 더 간편하다. [그림 C8-2]의 등가회로에서 우선 초기 조건에 대응하는 전압원들을 없앤 다음, C 마디에서 R_1 가지를 통해 들어오는 전류와 C 가지 및 L 과 R_2 의 직렬 연결 가지로 나가는 전류가 같고(KCL), 두 번째 루프의 전압 평형 관계로부터 C 의 전압 강하와 L 과 R_2 의 전압 강하가 같으므로(KVL), 회로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1}(X(s) - V_C(s)) = Cs V_C(s) + \frac{1}{Ls + R_2} V_C(s) \\ V_C(s) = \frac{Ls}{Ls + R_2} V_C(s) + Y(s) \end{cases}$$

아래 식에서 $V_C(s) = (Ls + R_2)Y(s)/R_2$ 을 얻어 위 식에 대입하여 정리하면

$$\frac{R_1 L C s^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1 + R_2}{Ls + R_2} \frac{Ls + R_2}{R_2} Y(s) = X(s)$$

가 되므로, 회로의 전달 함수는 주어진 소자 값을 대입하여 다음과 같이 구해진다.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R_2}{R_1 L C s^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1 + R_2} = \frac{4}{s^2 + 5s + 6}$$

임펄스 응답은 전달 함수를 부분분수로 전개하여 역 변환하면 다음과 같이 구해진다.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s+2} - \frac{4}{s+3} \right\} = (4e^{-2t} - 4e^{-3t})u(t)$$

또한 전달 함수로부터 다음과 같이 간단한 미분방정식으로 회로를 나타낼 수 있으며, 이를 이용하여 [예제 8-13]을 풀어도 같은 결과를 얻게 된다. 직접 확인해보기 바란다.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 4x(t)$$

이때 초기 조건은 $y(0^-) = R_2 i_2(0^-) = 16$, $\dot{y}(0^-) = R_2 (v_C(0^-) - y(0^-))/L = -40$ 이 된다. ■

8.8 양방향 라플라스 변환

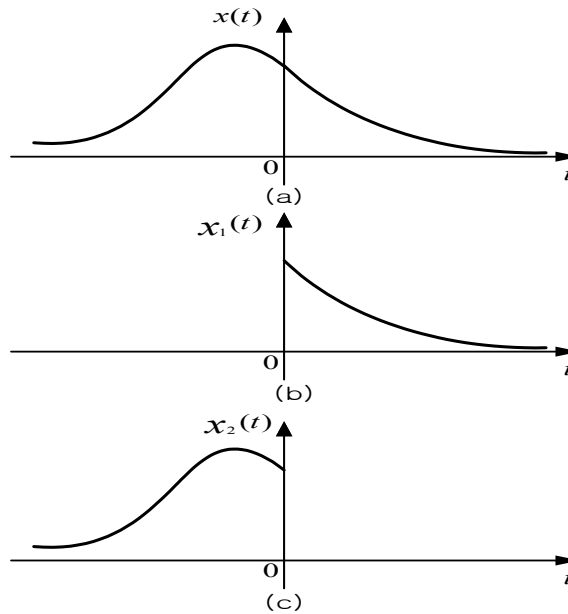
단방향 라플라스 변환으로는 비인과적 신호나 시스템을 다룰 수가 없다. 따라서 양방향 라플라스 변환을 사용해야 한다. 단방향 라플라스 변환은 신호를 인과적 신호로 제한한 양방향 라플라스 변환의 특별한 경우이며, 근본적으로 두 변환은 같다.

책의 8.1.2절에서 $e^{-at}u(t)$ 와 $-e^{-at}u(-t)$ 의 라플라스 변환의 결과가 같다는 것을 보였다. 유일한 차이점은 그들의 수렴 영역에 있다. 전자는 수렴 영역이 $Re(s) > -a$ 이고 후자는 $Re(s) < -a$ 이다. 분명히 $X(s)$ 의 역 라플라스 변환은 수렴 영역을 규정하지 않으면 유일하지 않다. 하지만 모든 신호를 인과적 신호로 제한하면 명백히 $1/(s+1)$ 의 역변환은 $e^{-at}u(t)$ 이다. 따라서 단방향 라플라스 변환에서는 $X(s)$ 의 역변환을 결정할 때 수렴영역을 무시할 수 있었다.

이제 임의의 양방향 변환이 두 개의 단방향 변환의 합으로 표현될 수 있음을 나타내 보기로 한다. 이럴 경우 단방향 변환쌍표를 이용하여 양방향 변환을 구하는 것이 가능해진다.

단방향 라플라스 변환을 이용한 양방향 라플라스 변환의 구득

[그림 C8-3(a)]에 나타낸 신호 $x(t)$ 를 생각해보자.



[그림 C8-3] 신호의 ‘인과+비인과 성분’ 표현

먼저 $x(t)$ 를 다음과 같이 양의 시간 성분과 음의 시간 성분을 나타내는 두 개의 신호 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 로 분리한다([그림 C8-3(b)], [그림 C8-3(c)]).

$$x_1(t) = x(t)u(t) \quad (C8.20)$$

$$x_2(t) = x(t)u(-t) \quad (C8.21)$$

$x(t)$ 의 양방향 라플라스 변환은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 x_2(t)e^{-st}dt + \int_0^{\infty} x_1(t)e^{-st}dt \\ &= X_2(s) + X_1(s) \end{aligned} \quad (C8.22)$$

여기서 $X_1(s)$ 는 인과 신호 성분 $x_1(t)$ 의 라플라스 변환이고, $X_2(s)$ 는 비인과 신호 성분 $x_2(t)$ 의 라플라스 변환으로, $X_2(s)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^0 x_2(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} x_2(-t)e^{st}dt \quad (C8.23)$$

따라서 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$X_2(-s) = \int_0^{\infty} x_2(-t)e^{-st}dt \quad (C8.24)$$

즉 $X_2(-s)$ 는 인과 신호 $x_2(-t)$ 의 단방향 라플라스 변환이다. $X_2(-s)$ 에서 s 의 부호를 바꾸면 $X_2(s)$ 가 얻어진다.

이상의 결과로부터 식(C8.22)의 양방향 라플라스 변환 $X(s)$ 는 단방향 라플라스 변환을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

- ① $x(t)$ 를 각각 인과 성분 $x_1(t)$ 와 비인과 성분 $x_2(t)$ 로 나눈다.
- ② $x_1(t)$ 와 $x_2(-t)$ 모두 인과적이므로, 두 신호의 단방향 라플라스 변환 $X_1(s)$ 와 $X_2(-s)$ 를 구한다.
- ③ $X_2(-s)$ 의 s 의 부호를 바꾸어 $X_2(s)$ 를 구한 뒤 이에 $X_1(s)$ 를 더하여 양방향 라플라스 변환 $X(s)$ 를 얻는다.

이때 $X_1(s)$ 의 수렴 영역이 $Re(s) > \sigma_1$, $X_2(-s)$ 의 수렴 영역이 $Re(s) > \sigma_2$ 라고 하면, $X_2(s)$ 의 수렴 영역은 $Re(s) < \sigma_2$ 가 되고 $X(s) = X_1(s) + X_2(s)$ 이므로 $X(s)$ 의 수렴 영역은 $\sigma_1 < Re(s) < -\sigma_2$ 이 된다. 이는 8.1.2절에서 살펴본 것처럼 허축에 평행한 띠 형태의 수렴 영역이다.

수렴 영역에서 $X(s)$ 가 해석적, 다시 말해 유한한 값을 가져야 하므로 $X(s)$ 의 극은 반드시 수렴 영역의 바깥에 있어야 한다. 인과 성분 $x_1(t)$ 에 기인하는 $X(s)$ 의 극은 수렴 영역의 좌측에 놓이게 되고 비인과 성분 $x_2(t)$ 에 기인하는 극은 수렴 영역의 우측에 위치하게 된다. 이 사실은 양방향 라플라스 변환의 역 변환을 구하는데 결정적으로 중요하다.

■ 예제 C8-5 : 수렴 영역에 따른 역 라플라스 변환

다음의 $X(s)$ 에 대해 수렴 영역 (a) $-2 < \text{Re}(s) < 1$ (b) $\text{Re}(s) > 1$ (c) $\text{Re}(s) < -2$ 일 경우에 역 라플라스 변환을 구하라.

$$X(s) = -\frac{3}{(s+2)(s-1)}$$

<풀이>

(a) $-2 < \text{Re}(s) < 1$

$X(s)$ 를 부분분수로 전개하면 다음과 같다.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1}$$

$X(s)$ 는 $s = -2, 1$ 의 극을 가진다. 그런데 수렴 영역이 $-2 < \text{Re}(s) < 1$ 이므로, 수렴 영역의 좌측에 있는 $s = -2$ 의 극은 인과 신호, 수렴 영역의 우측에 있는 $s = 1$ 의 극은 비인과 신호에 의한 것이다. 따라서 $X(s)$ 의 역 변환은 다음과 같이 된다([예제 8-2] 참조).

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^t u(-t)$$

(b) $\text{Re}(s) > 1$

$s = -2, 1$ 의 두 극이 모두 수렴 영역의 좌측에 있으므로 인과 신호에 의한 것이다. 따라서 $X(s)$ 의 역 변환은 다음과 같이 된다.

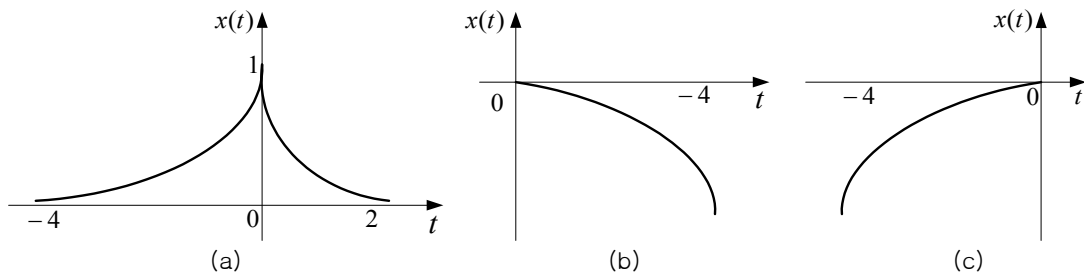
$$x(t) = (e^{-2t} - e^t)u(t)$$

(c) $\text{Re}(s) < -2$

$s = -2, 1$ 의 두 극이 모두 수렴 영역의 우측에 있으므로 비인과 신호에 의한 것이다. 따라서 $X(s)$ 의 역 변환은 다음과 같이 된다.

$$x(t) = (-e^{-2t} + e^t)u(-t)$$

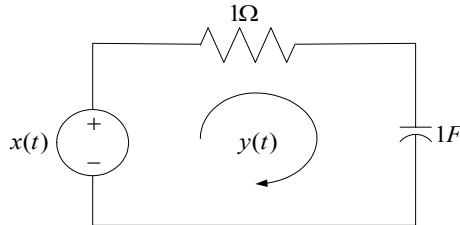
[그림 C8.5]는 같은 $X(s)$ 에 대해 다른 수렴영역을 가지는 역 변환 결과들을 보여준다. ■



[그림 C8-4] 수렴 영역에 따른 $X(s)$ 의 세 가지 역 변환 결과 신호

■ 예제 C8-6 : 비인과 신호에 대한 시스템의 출력

[그림 C8.5]의 RC 회로에서 전압 $x(t) = e^t u(t) + e^{2t} u(-t)$ 가 인가될 때 폐로 전류 $y(t)$ 를 구하라.



[그림 C8-5] [예제 C8-6]의 RC회로

<풀이>

회로의 전달 함수 $H(s)$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$H(s) = \frac{s}{s+1}$$

회로의 임펄스 응답 $h(t)$ 가 인과 신호이므로 $H(s)$ 의 수렴 영역은 $Re(s) > -1$ 이다. 또한 입력 전압 $x(t)$ 의 양방향 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$X(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} = \frac{-1}{(s-1)(s-2)}, \quad 1 < Re(s) < 2$$

$$X(s)H(s) = \frac{-s}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{1}{6} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{2}{3} \frac{1}{s-2}$$

만약 $X(s)H(s)$ 의 수렴 영역이 존재한다면, 응답 $y(t)$ 는 $X(s)H(s)$ 를 역 변환하여 구할 수 있을 것이다. $X(s)H(s)$ 의 수렴 영역은 $X(s)$ 와 $H(s)$ 의 수렴 영역의 공통 영역으로, 이 경우 $1 < Re(s) < 2$ 이다. 즉 $s = \pm 1$ 은 수렴 영역 좌측에 놓여 있으므로 인과 신호에 의한 것이고, 즉 $s = 2$ 는 수렴 영역의 우측에 놓여 있으므로 비인과 신호에 의한 것이다. 따라서 $X(s)H(s)$ 를 역 변환하면 다음과 같이 된다.

$$y(t) = \frac{1}{6} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^t u(t) + \frac{2}{3} e^{2t} u(-t)$$

만약 입력 전압이 $x(t) = e^{-3t} u(t) + e^{-t} u(-t)$ 라면, $X(s)$ 의 수렴 영역은 $-3 < Re(s) < -1$ 이므로 $X(s)H(s)$ 의 수렴 영역이 존재하지 않는다. 따라서 응답 $y(t)$ 는 발산할 것이다. ■