제 3 장

기본적인 신호와 연산

책의 ‘1절 기본적인 연속 신호’와 관련하여 책에서 다룬 신호의 분류 중 일부에 대해 상세한 보충 설명을 추가하였고, 소개하지 못했던 삼각 펄스 신호에 대해서도 소개하였다.

책의 ‘2절 기본적인 이산 신호’와 관련해서는 임펄스 신호와 계단 신호를 이용한 신호의 표현 예를 추가하였고, 이산 정현파 신호의 주기성에 대한 설명을 보충하였다.

그리고 특히 계단 신호를 이용한 신호의 표현 방법에 대한 문제들을 중심으로 심화 연습 문제를 추가하여 제시하였다.

3.1 기본적인 연속 신호

3.1.1 (단위) 계단 함수

계단 신호나 사각 펄스와 같이 불연속점을 가지는 신호의 불연속점에서의 값은 일반적으로 정의되지 않는다. 그러나 경우에 따라 필요에 의해 왼쪽이나 오른쪽 경계의 값 또는 두 경계 값의 평균으로 나타내기도 하는데, 수학적으로 아주 특별한 경우를 제외하면 어떻게 나타내더라도 큰 문제가 없다.
예를 들어, 단위 계단 함수는 (책)식 (3.1) 외에 문헌에 따라 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$u(t)=\begin{cases}1, & t \geqq 0 \\ 0, & t<0\end{cases} \tag{C3.1a}$$

$$u(t)=\begin{cases}1, & t > 0 \\ 0, & t \leqq 0\end{cases} \tag{C3.1b}$$

$$u(t)=\begin{cases}1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t=0 \\ 0, & t<0\end{cases} \tag{C3.1c}$$

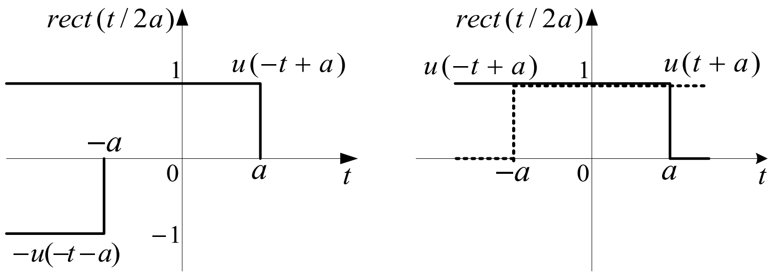
3.1.2 사각 펄스 함수

단위 사각 펄스는 폭과 크기, 그리고 면적이 모두 1인 사각 펄스로서 다음과 같이 된다.

$$rect(t)=\begin{cases}1, & |t|<1/2 \\ 0, & |t|>1/2\end{cases} \tag{C3.2}$$

사각 펄스 함수는 (책)[그림 3-2(b)] 나타낸 것 외에도 [그림 C3-1]과 같이 계단 함수를 이용하여 나타낼 수 있으며, 이들을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$rect(t/2a)=u(-t+a)-u(-t-a)=u(t+a)u(-t+a) \tag{C3.3}$$



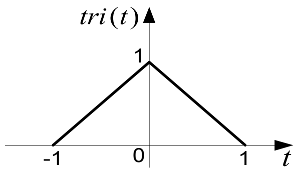
(a) u(−t+a)−u(−t−a)　　(b) u(−t+a)u(t+a)

[그림 C3-1] 사각 펄스의 여러 가지 표현

삼각 펄스 함수

(단위) 삼각 펄스 함수는 [그림 C3-2]에 나타낸 것과 같이 크기와 넓이가 1인 삼각형 모양의 신호이다.

$$tri(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \leqq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \tag{C3.4}$$



[그림 C3-2] 삼각 펄스

삼각 펄스는 계단 함수나 램프 함수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} tri(t) &= (t+1)u(t+1) - 2tu(t) + (t-1)u(t-1) \\ &= r(t+1) - 2r(t) + r(t-1) \end{aligned} \tag{C3.5}$$

3.1.5 (단위) 임펄스 함수

■ 예제 C3-1 : *임펄스 함수의 체 거르기 성질*

다음의 적분 값을 구하라.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{5} \cos(5\pi t - \frac{\pi}{3})\delta(t-6)dt$

<풀이> 임펄스 함수의 체 거르기 성질을 이용하면 쉽게 적분 값을 구할 수 있다.
임펄스 함수가 존재하는 시간 $t=6$이 적분 구간 $-2 \leqq t \leqq 5$ 내에 있지 않으므로 이 적분 값은 0이다.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (t^2+2t+3)\delta(t-2)dt$

<풀이> 임펄스 함수가 존재하는 시간 $t=2$가 적분 구간 $-1 \leqq t \leqq 3$ 내에 있으므로, 임펄스 함수의 체 거르기 성질을 적용하면

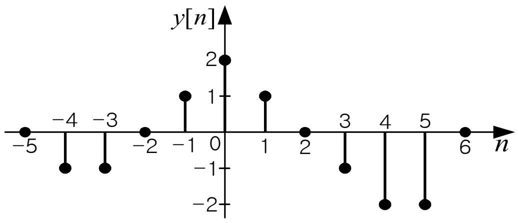
$$\int_{-1}^{3} (t^2+2t+3)\delta(t-2)dt = t^2+2t+3\Big|_{t=2} = 2^2+2\cdot 2+3 = 11$$

3.2 기본적인 이산 신호

3.1절에서 살펴본 대부분의 기본적인 연속 신호를 샘플링하면 기본적인 이산 신호가 된다. 두 종류 상이의 특별한 차이라고 하자면 임펄스 신호가 매우 단순한 신호가 된다는 점과 정현파 신호가 항상 주기 신호가 되는 것은 아니라는 정도이다. 그러므로 책에서도 중복을 피하고 설명이 필요한 내용들만 제시하고 있는 것이다.

기본 신호들은 시스템을 해석하는 데 큰 역할을 할 뿐만 아니라 이들의 결합으로 다양하고 더 복잡한 신호를 나타낼 수 있게 해준다.

■ 예제 C3-1 : *임펄스 신호와 계단 신호를 이용한 신호 표현*
[그림 C3-3]에 주어진 이산 신호를 임펄스 신호와 계단 신호를 이용하여 나타내라.



[그림 C3-3] [예제 C3-1]의 신호 y[n]

<풀이>
임펄스 신호를 이용한 신호 표현은 신호를 각각의 시간 성분으로 쪼갠 뒤에 (책)식 (3.25)에 해당 시간의 신호 샘플 값을 대입하면 되므로

$$
\begin{aligned}
y[n] = &-\delta[n+4]-\delta[n+3]+\delta[n+1]+2\delta[n] \\
&+\delta[n-1]-\delta[n-3]-2\delta[n-4]-2\delta[n-5]
\end{aligned}
$$

계단 신호를 이용하여 신호를 나타내기 위하여 $y[n]$을 같은 함수 꼴로 표현될 수 있는 성분들로 나누면, ① 2개의 샘플로 이루어진 크기 -1인 사각형 펄스($-4 \leqq n \leqq -3$) ② 3개의 샘플로 된 기울기 1인 램프 신호($-2 \leqq n \leqq 0$) ③ 3개의 샘플로 된 기울기 -1인 램프 신호($1 \leqq n \leqq 3$) ④ 샘플 2개로 구성된 크기 -2인 사각형 펄스($4 \leqq n \leqq 5$)의 4개로 쪼갤 수 있다. 따라서 계단 신호를 이용한 표현은 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= -\{u[n+4]-u[n+2]\}+(n+2)\{u[n+2]-u[n-1]\} \\
&\quad -(n-2)\{u[n-1]-u[n-4]\}-2\{u[n-4]-u[n-6]\} \\
&= -u[n+4]+(n+3)u[n+2]-2nu[n-1]+(n-4)u[n-4]+2u[n-6]
\end{aligned}
$$

신호를 어떻게 쪼개느냐에 따라 계단 신호를 이용한 표현은 달라질 수 있다. $y[n]$을 ① 크기 -1인 임펄스 신호($n=-4$) ② 샘플 3개로 된 기울기 1인 램프 신호($-3 \leqq n \leqq -1$) ③ 5개의 샘플로 된 기울기 -1인 램프 신호($0 \leqq n \leqq 4$) ④ 크기 -2인 임펄스 신호($n=5$)로

쪼갤 수도 있다. 이 경우의 신호 표현은 다음과 같이 된다.

$$y[n] = -\{u[n+4]-u[n+3]\}+(n+2)\{u[n+3]-u[n]\} \\ -(n-2)\{u[n]-u[n-5]\}-2\{u[n-5]-u[n-6]\}$$

$$= -u[n+4]+(n+3)u[n+3]-2nu[n]+(n-4)u[n-5]+2u[n-6]$$

표현식이 바르게 구해졌는지 확인해 보려면 시간 변수 n에 적당한 값을 대입하여 그림의 신호와 값이 일치하는지를 따져보면 된다. ■

■ 예제 C3-2 : *이산 정현파 신호의 주기성 - (책)_[그림 3-20]의 보충*

[그림 3-20(a)]의 $x_1[n]$을 수식으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$x_1[n] = \cos(\Omega_0 n) = \cos(\frac{\pi}{6}n)$$

$x_3[n]$을 $\Omega_2 = \pi/6 + 2\pi$인 이산 코사인파라고 하자. 아래와 같이 간단한 계산에 의해 $x_1[n]$과 $x_3[n]$이 같다는 것을 금방 알 수 있다.

$$x_3[n] = A\cos\left(\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)n\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{6}n+2\pi n\right) = A\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) = x_1[n]$$

이 결과는 2π의 정수배만큼 떨어져 있는 주파수를 갖는 이산 정현 신호들을 구분할 수 없다는 사실을 확인해 준다. ■