

연속 시간 푸리에 변환

책의 ‘1절 푸리에 변환의 개요’와 관련하여 주기 신호의 푸리에 변환과 같은 파형을 갖는 비주기 신호의 푸리에 변환의 관계를 책과 다른 방법으로 유도하는 과정을 보였다.

책의 ‘3절 푸리에 변환의 성질’과 관련하여 파스발 정리의 유용성을 보여주는 예제를 추가하였다.

책의 ‘4절 주파수 응답과 시스템 해석’과 관련하여 주파수 응답을 이용하여 시스템 출력을 구하는 방법의 이해를 돕기 위하여 예제들을 보충하였다.

분량 등의 문제로 책에 포함시키지 못했던, 푸리에 변환의 아주 중요한 응용 분야인 필터링과 관련하여 ‘5절 푸리에 변환의 응용 - 필터링’을 새롭게 추가하였다. 이 새로운 절에는 이상적인 주파수 선택 필터, 실제적인 필터, 간단한 수동 필터로 나누어 필터링과 관련된 필수적인 사항들을 간단히 소개하였다. 이를 통해 푸리에 변환의 유용성을 새삼 확인할 수 있을 것이다. 이 절에서는 책과 마찬가지로 절에 대한 소개, 학습 포인트, 절 마지막의 핵심 포인트, Quick Check 등을 제시하여 자율적인 학습을 도울 수 있도록 하였다.

연속 신호의 푸리에 해석을 통하여 푸리에 해석과 신호 및 시스템의 주파수 영역 취급에 대해 개념을 제대로 확립하면, 9장 이후에 소개되는 이산 시간 푸리에 해석은 어려울 것이 없으므로 책과 심화 학습 자료를 이용해 잘 익혀두기 바란다.

7.1 푸리에 변환의 개요

7.1.3 주기 신호의 푸리에 변환

(책)식 (7.11)에 주어진 주기 신호 $x_T(t)$ 의 푸리에 변환 $X_T(\omega)$ 와 이 주기 신호의 한 주기 파형을 갖는 비주기 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환 $X(\omega)$ 의 관계를 책과는 다른 방법으로 이끌어 낼 수도 있다.

비주기 신호 $x(t)$ 와 주기 신호 $x_T(t)$ 의 관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = \begin{cases} x_T(t), & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{그 외} \end{cases} \quad (C7.1)$$

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t-kT) \\ &= x(t) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \right) = x(t) * p(t) \end{aligned} \quad (C7.2)$$

즉, 주기 신호는 비주기 신호 $x(t)$ 와 주기 간격으로 반복되는 무한 임펄스 열 $p(t)$ 와의 컨볼루션으로 표현할 수 있다. 그러면 푸리에 변환의 시간 컨볼루션 성질에 의해 주기 신호 $x_T(t)$ 의 푸리에 변환 $X_T(\omega)$ 는 다음과 같이 된다.

$$X_T(\omega) = X(\omega)P(\omega) \quad (C7.3)$$

임펄스 열의 푸리에 변환은 (책)[예제 7-3]에서 이미 다음과 같이 구한 바 있다.

$$P(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \quad (C7.4)$$

식 (C7.4)를 식 (C7.3)에 대입하여 정리하면 $X_T(\omega)$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X_T(\omega) &= X(\omega)P(\omega) = X(\omega) \left(\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \right) \\ &= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned} \quad (C7.5)$$

식 (C7.5)는 (책)식 (7.11)과 일치한다.

7.3 푸리에 변환의 성질

7.3.1 파스발 정리

■ 예제 C7-1 : 파스발 정리에 의한 신호 에너지의 계산

신호 $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$ 는 주파수 $-a \leq \omega \leq a$ 구간에 총 에너지의 몇 %가 몰려 있는지 구하라.

<풀이>

$x(t)$ 는 $t > 0$ 과 $t < 0$ 의 두 구간으로 나누어 $x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$ 로 나타낼 수 있다. $v(t) = e^{-at}u(t)$ 의 푸리에 변환을 $V(\omega)$ 라고 하면, (책)식 (7.13)과 푸리에 변환의 선형성 및 시간 반전 성질에 의해 $x(t)$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 구해진다.

$$X(\omega) = V(\omega) + V(-\omega) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

따라서 파스발 정리를 이용하여 다음과 같이 주파수 영역에서 에너지를 계산할 수 있다.

$$E = \frac{1}{2\pi} \int |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega$$

위의 적분은 $\omega = a \tan \theta$ 로 치환하여 계산하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \frac{4a^3 \sec^2 \theta}{a^4 \sec^4 \theta} d\theta = \frac{4}{2\pi a} \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{4}{2\pi a} \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{4}{4\pi a} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) = \frac{1}{\pi a} \left(\tan^{-1} \frac{\omega}{a} + \frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} \right) \end{aligned}$$

마지막 등식은 $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta = 2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$ 임을 이용한 것이다. 따라서 주어진 주파수 구간에서의 에너지는 다음과 같다.

$$E_{[-a, a]} = \frac{1}{\pi a} \left(\tan^{-1} \frac{\omega}{a} + \frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{1}{\pi a} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right)$$

총에너지는 $-\infty < \omega < \infty$ 에 대해서 계산하면 다음과 같으므로

$$E_{[-\infty, \infty]} = \frac{1}{\pi a} \left(\tan^{-1} \frac{\omega}{a} + \frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi a} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{a}$$

가 되고, 두 에너지의 비는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{E_{[-a, a]}}{E_{[-\infty, \infty]}} \times 100 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) \times 100 = 81.5\%$$

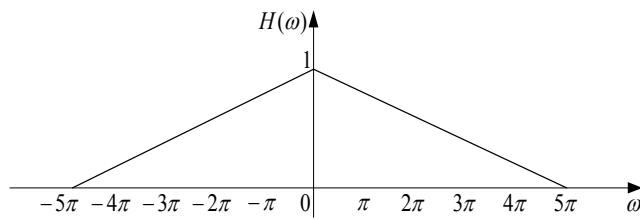
이처럼 파스발 정리로부터 특정 주파수 구간에 에너지가 얼마나 몰려있는지 알 수 있다. 이는 신호의 분석, 근사화 등에 활용될 수 있는 유용한 정보로서 시간 영역에서는 알아내는 것이 불가능하다. ■

7.4 주파수 응답과 시스템 해석

7.4.5 주파수 응답을 이용한 시스템 출력 결정

■ 예제 C7-2 : 주파수 응답을 이용한 시스템 출력의 결정 - 주기 신호 입력

시스템의 주파수 응답이 [그림 C7-1]과 같을 때(위상은 모든 주파수에 대해 0), 주기 신호 입력 $x(t) = 10\cos(\pi t) + 15\cos(3\pi t)$ 에 대한 출력 신호를 구하라.



[그림 C7-1] [예제 C7-2]의 시스템의 주파수 응답

<풀이>

[그림 C7-1]로부터 시스템의 주파수 응답은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H(\omega) = \Delta_{5\pi}(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{5\pi}|\omega|, & |\omega| \leq 5\pi \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

(책)식 (C7.12)의 코사인파의 푸리에 변환쌍을 이용하여 입력 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환을 구하면

$$X(\omega) = 10\pi\delta(\omega - \pi) + 10\pi\delta(\omega + \pi) + 15\pi\delta(\omega - 3\pi) + 15\pi\delta(\omega + 3\pi)$$

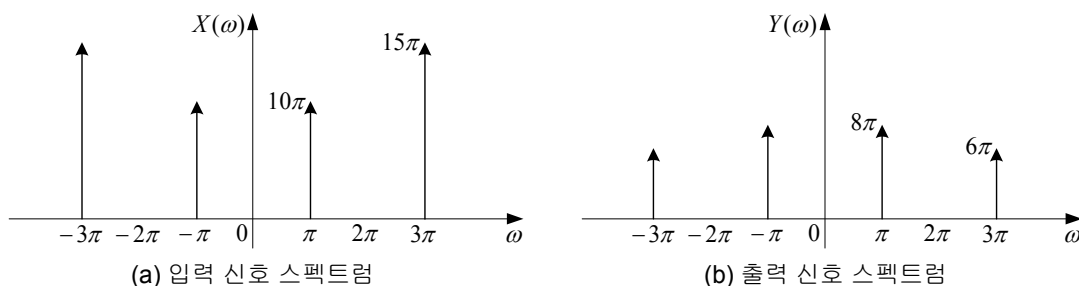
와 같고, 이 스펙트럼을 [그림 C7-2(a)]에 나타내었다. 출력 신호 $y(t)$ 의 스펙트럼은 다음과 같이 $X(\omega)$ 와 $H(\omega)$ 의 곱으로 구해지며, 이를 [그림 C7-2(b)]에 나타내었다.

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) = 10\pi H(\pi)\delta(\omega - \pi) + 10\pi H(-\pi)\delta(\omega + \pi) \\ &\quad + 15\pi H(3\pi)\delta(\omega - 3\pi) + 15\pi H(-3\pi)\delta(\omega + 3\pi) \\ &= 8\pi\delta(\omega - 2\pi) + 8\pi\delta(\omega + 2\pi) + 6\pi\delta(\omega - 3\pi) + 6\pi\delta(\omega + 3\pi) \end{aligned}$$

(책)식 (7.12)의 코사인파의 푸리에 변환쌍을 이용하여 이를 역 변환하면 다음과 같이 출력 신호가 얻어진다.

$$y(t) = 3\cos(\pi t) + 2\cos(3\pi t)$$

위의 결과에서 시스템을 통과하면서 $\omega = 3\pi$ 의 정현파의 크기가 $\omega = \pi$ 의 정현파보다 작아진 것을 볼 수 있는데, 이것은 [그림 C7-2]를 보면 직관적으로 파악이 가능하다.



[그림 C7-2] 입력과 출력의 스펙트럼

이 예에서 볼 수 있듯이 주기 신호 입력에 대한 LTI 시스템의 출력은 주기 신호가 된다. 주기 신호의 경우에는 푸리에 변환 대신 푸리에 급수를 이용해 계산해도 마찬가지다. ■

■ 예제 C7-3 : 주파수 응답을 이용한 시스템의 계단 응답

임펄스 응답 $h(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$ 인 인과 LTI 시스템의 계단 응답을 구하라.

<풀이>

임펄스 응답과 입력의 푸리에 변환은 각각 $H(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$, $U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ 이므로, 출력 스펙트럼 $Y(\omega)$ 는 다음과 같이 된다.

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{j\omega}H(j\omega) + \pi H(0)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega(a + j\omega)} + \pi\left(\frac{1}{a}\right)\delta(\omega)$$

$Y(\omega)$ 의 역변환을 구하기 위해 위 식의 우변의 첫 번째 항을 부분분수로 전개하면

$$\frac{1}{j\omega(a + j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{a + j\omega}$$

A 를 구하기 위해 위 식의 양변에 $j\omega$ 를 곱하여 $\omega = 0$ 을 대입하면

$$\frac{1}{a + j\omega} \Big|_{\omega=0} = \left(A + \frac{j\omega B}{a + j\omega} \right) \Big|_{\omega=0}$$

이므로, $A = 1/a$ 를 얻는다. 같은 방법으로 양변에 $(a + j\omega)$ 를 곱하여 $\omega = ja$ 를 대입하면

$$\frac{1}{j\omega} \Big|_{\omega=ja} = \left(\frac{A(a + j\omega)}{j\omega} + B \right) \Big|_{\omega=ja}$$

이므로, $B = -1/a$ 을 얻는다. 따라서 $Y(\omega)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y(\omega) = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{a + j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{a + j\omega} + \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) \right]$$

위 식 우변의 첫 번째 항은 실수 지수 신호의 푸리에 변환이고 두 번째 항은 단위 계단 신호의 푸리에 변환이므로 $Y(\omega)$ 의 역 변환은 다음과 같이 된다.

$$y(t) = \frac{1}{a} (-e^{-at}u(t) + u(t)) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})u(t)$$

역 변환의 계산 과정에서 계속 $j\omega$ 가 따라다니고 복소수 계산을 해야 하는 등 조금 번거로운 면이 있다. 다음 장에서 배우게 될 라플라스 변환을 이용하면 이런 불편함이 사라지게 되므로, 주파수 영역에서 시스템의 출력을 결정할 때에는 일반적으로 라플라스 변환을 선호한다. 라플라스 변환을 이용한 출력 결정은 (책)[그림 7-16]에서 푸리에 변환기들이 라플라스 변환기로 대체된 것과 같다. 이것은 어디까지나 이론적 해석일 때의 문제이고, 컴퓨터를 이용한 수치 해석에서는 고속 푸리에 변환을 이용해 (책)[그림 7-16]의 방법으로 문제를 해결한다. ■

7.5 푸리에 변환의 응용 - 필터링

신호와 시스템의 해석 및 취급에서 보편적으로 활용되며, 푸리에 변환을 이용한 주파수 영역 해석의 이점과 유용함을 확실히 인식시켜 줄 예로 필터링을 들 수 있다. 필터링은 일반적으로 신호 속에 포함되어 있는 불필요하고 원하지 않는 성분들을 필수적이고 유용한 성분들과 분리해서 걸러내는 동작을 일컬으며, 이를 수행해주는 시스템을 필터라고 한다. 실생활에서 사용하는 정수기, 공기청정기, 커피메이커 등에 들어 있는 필터가 그 처리 대상의 속성에 맞추어 통과시킬 것과 통과시키지 않을 것을 분리하는 역할을 하듯이, **신호 처리에서 필터는 주어진 신호에 잡음과 같이 원하지 않는 다른 신호 성분을 걸러내고 필요한 성분만 뽑아내어 제공해 주는 역할을 한다.** 잡음은 통상적으로 신호가 전달되는 경로 또는 처리 장치나 환경의 물리적 특성의 영향으로 생긴다. 예를 들면, 트랜지스터의 열 잡음이나 전기적 특성의 불균일성이나 비대칭성으로 인한 통신 선로 잡음 등이 그것이다.

7.5.1 이상적인 주파수 선택 필터

일반적으로 필터의 기능을 분류할 때 기준이 되는 것은 주파수 영역에서의 특성이다. 만약 신호 중의 필요한 성분과 불필요한 성분의 주파수가 서로 다르다면, 특정한 형태의 주파수 응답을 갖는 필터를 이용하여 이들을 쉽게 분리해낼 수 있다. 이러한 필터를 **주파수 선택** frequency selective **필터**라고 하며, 주파수 분리 특성에 따라 **저역 통과(LP)** Low Pass, **고역 통과(HP)** High Pass, **대역 통과(BP)** Band Pass, **대역 저지(BS)** Band Stop의 네 가지로 구별된다.

주파수 선택 필터에서 주파수축은 크게 두 종류의 대역으로 나뉜다. **통과 대역** pass band은 **필터를 통과할 수 있는 신호의 주파수 범위**를 가리키고, **저지 대역** stop band은 **필터를 통과할 수 없는, 즉 필터에 의해 차단되는 주파수 범위**를 가리킨다. 이상적인 주파수 선택 필터란 필요한 주파수 성분들은 조금의 왜곡도 없이 그대로 통과시키고, 불필요한 성분들은 100% 완벽하게 차단하는 필터를 말한다. 다시 말해 통과 대역에서 $|H(\omega)| = 1$, 저지대역에서 $|H(\omega)| = 0$ 인 특성을 갖는 필터이다.

- 저역 통과(LP) 필터는 $|\omega| < \omega_c$ 인 낮은 주파수 대역의 신호만 통과시키고 그 외의 주파수 범위의 신호는 모두 차단하는 필터이다.

$$H_{LP}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \text{그 외} \end{cases} \quad (C7.6)$$

- 고역 통과(HP) 필터는 $|\omega| > \omega_c$ 인 높은 주파수 대역의 신호만 통과시키고 그 외의 주파수 범위의 신호는 모두 차단하는 필터이다.

$$H_{HP}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > \omega_c \\ 0, & \text{그 외} \end{cases} \quad (C7.7)$$

- 대역 통과(BP) 필터는 $\omega_{cl} < |\omega| < \omega_{ch}$ 인 주파수 대역의 신호만 통과시키고 그 외의 주파수 범위의 신호는 모두 차단하는 필터이다.

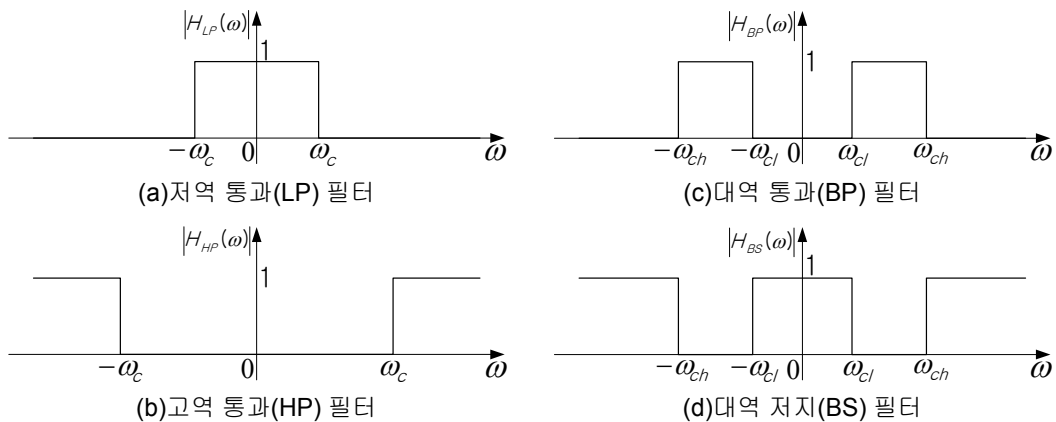
$$H_{BP}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_{cl} < |\omega| < \omega_{ch} \\ 0, & \text{그 외} \end{cases} \quad (C7.8)$$

- 대역 저지(BS) 필터는 $\omega_{cl} < |\omega| < \omega_{ch}$ 인 주파수 대역의 신호만 차단하고 그 외의 주파수 범위의 신호는 모두 통과시키는 필터이다.

$$H_{BS}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_{cl} < |\omega| < \omega_{ch} \\ 1, & \text{그 외} \end{cases} \quad (C7.9)$$

- 통과 대역은 필터가 신호를 통과시키는, 즉 $|H(\omega)| = 1$ 인 주파수 구간이다.
- 저지 대역은 필터가 신호를 차단하는, 즉 $|H(\omega)| = 0$ 인 주파수 구간이다.
- **차단 주파수** cutoff frequency는 통과 대역과 저지 대역의 경계 주파수를 말한다.

[그림 C7-3]에 이들 4가지 유형의 이상적인 필터의 주파수 응답을 나타내었다.



[그림 C7-3] 이상적인 주파수 선택 필터

[그림 C7-3]과 같은 주파수 응답 특성을 갖는 필터들의 앞에 ‘이상적인’이란 말이 붙은 이유는 이들 필터는 물리적으로는 구현할 수 없기 때문이다. 예를 들어, 저역 통과 필터의 경우 주파수 응답이 펄스 폭이 $2\omega_c$ 인 사각 펄스와 같으므로 이를 역 푸리에 변환하면 다음과 같은 임펄스 응답을 얻게 된다.

$$h_{LP}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \quad (C7.10)$$

이 임펄스 응답은 비인과적이므로 분명히 물리적으로는 구현이 불가능하다.

7.5.2 실제적인 필터

물리적으로 구현이 가능한 실제적인 필터는 (책)[예제 7-10]의 가장 간단한 저역 통과 필터인 RC 회로의 주파수 응답을 보면 알겠지만, [그림 C7-3]의 주파수 응답과는 달리 통과 대역에서 저지 대역으로 넘어가는 경계가 칼로 자른 것 같지 않고 일정한 주파수 구간에 걸쳐 점진적으로 변화가 이루어진다. 또한 통과 대역의 전 주파수 범위에서 이득 값이 항상 1로 일정한 것은 아니며, 저지 대역의 이득도 대역의 전 주파수 범위에서 완전히 0이 되지는 않는다.

통과 대역에서 저지 대역으로 서서히 옮겨가는 주파수 구간을 **천이 대역** ^{transition band}이라고 한다. 천이 대역의 폭이 좁을수록 좀 더 이상적인 필터에 가까워져서 차단 특성이 양호해지므로 좋은 하지만 필터 차수의 증가 등 대가도 지불해야 하므로 단순한 문제는 아니다.

실제 필터에서는 차단 주파수와 대역폭의 정의 또한 달라져야 한다. 가장 일반적으로 사용되는 것이 반전력 주파수의 개념이다. 다음과 같이 **통과 대역 이득의 최댓값에 대해 전력이 반이 되는, 즉 이득이 $1/\sqrt{2}$ 이 되는 주파수를 필터의 차단 주파수로** 정의한다.

$$\frac{|H(\omega_c)|^2}{|H(\omega)|_{\max}^2} = \frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad \frac{|H(\omega_c)|}{|H(\omega)|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (C7.11)$$

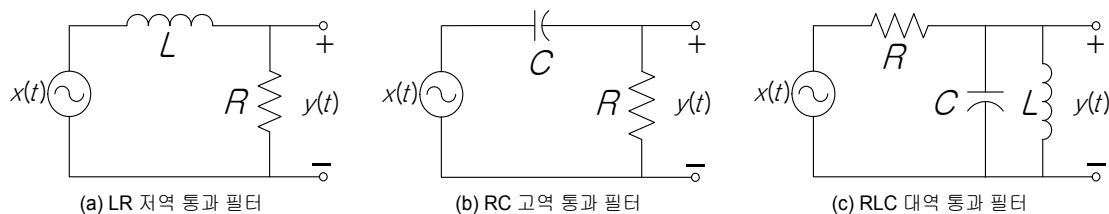
식 (C7.11)의 차단 주파수는 전력비를 dB로 환산하면 -3[dB]가 되므로 3[dB] 차단 주파수라고도 한다. 대역폭은 여러 가지 정의들이 있지만, 차단 주파수를 식 (C7.11)과 같이 정의할 경우 (통상 양의 주파수 범위에서 정의하므로) **저역 통과 필터에 대해서는 $\omega = 0$ 에서부터 $\omega = \omega_c$ 까지의 주파수 범위 $\omega_b = \omega_c$ 을, 대역 통과 필터에서는 높고 낮은 두 차단 주파수 사이의 주파수 범위 $\omega_b = \omega_{ch} - \omega_{cl}$ 을 대역폭으로 정의한다.**

연속 신호를 처리하는 아날로그 필터는 필터를 구성하는 소자에 따라 수동 필터와 능동 필터로 나뉜다. 수동 필터는 저항(R), 인덕터(L), 커패시터(C) 등의 수동 소자를 이용하여 구성된 필터이고, 능동 필터는 저항(R), 커패시터(C)와 같은 수동 소자와 함께 연산 증폭기를

사용하여 구성된 필터이다. 수동 필터는 일반적으로 능동 필터보다 동작 주파수가 높고, 능동 필터는 IC 칩으로 구현 가능한 등 제각기 장단점을 가지고 있으므로 응용 문제에 따라 적절히 선택하면 된다.

7.5.3 간단한 수동 필터

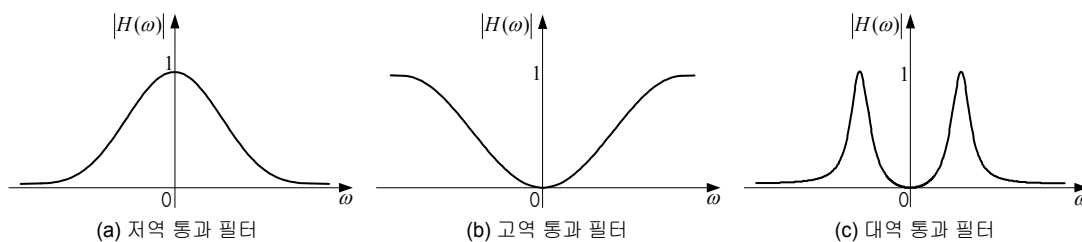
물리적인 필터 중 가장 간단한 필터는 R, L, C 소자를 하나씩만 사용한 전기 회로이다. R과 C, 또는 R과 L로 이루어진 1차 회로는 어느 소자에서 출력 전압을 빼내느냐에 따라 저역 통과 또는 고역 통과 필터로 작동한다. 대역 통과 필터는 2개의 차단 주파수를 갖고 필터링 동작이 보다 복잡하므로 1차 회로로는 구현이 어렵고 L과 C를 모두 사용하는 2차 회로로 구성된다. 이러한 수동 필터의 예를 [그림 C7-4]에 나타내었다.



[그림 C7-4] 간단한 수동 필터

RC 저역 통과 필터는 (책)[예제 7-10]에서 이미 다루었으며, 주파수 응답은 (책)식 (7.68)로 주어지고, 진폭 응답 및 위상 응답 곡선은 (책)[그림 7-18]에 주어져 있다. LR 고역 통과 필터는 [그림 C7-4(a)]에서 L과 R의 위치를 바꾼 것이다. RLC 대역 통과 필터는 공진 회로로서 공진 주파수가 통과 대역의 중심 주파수인 대역폭이 좁은 대역 통과 필터이다.

[그림 C7-5]는 LP, HP, BP 수동 필터의 전형적인 (주파수) 진폭 응답을 그린 것이다.



[그림 C7-5] 간단한 수동 필터의 진폭 응답

이러한 간단한 수동 필터들의 주파수 응답을 [표 C7-1]에 정리하여 나타내었다. (책)[예제 7-10]에서와 같이 회로 방정식을 세워 푸리에 변환함으로써 얻을 수 있다.

[표 C7-1] 간단한 수동 필터

필터 유형	주파수 응답		
RC 저역 통과 필터	$H(\omega) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}$	(C7.12)	$\omega_c = \frac{1}{RC}$
RC 고역 통과 필터	$H(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}}$	(C7.13)	$\omega_c = \frac{1}{RC}$
RL 저역 통과 필터	$H(\omega) = \frac{\frac{R}{L}}{j\omega + \frac{R}{L}}$	(C7.14)	$\omega_c = \frac{R}{L}$
RL 고역 통과 필터	$H(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{R}{L}}$	(C7.15)	$\omega_c = \frac{R}{L}$
RLC 대역 통과 필터	$H(\omega) = \frac{\frac{1}{RC}(j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}(j\omega) + \frac{1}{LC}}$	(C7.16)	$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

■ 예제 C7-4 : 저역 통과 필터의 필터링 동작

[표 C7-1]의 주파수 응답을 갖는 RC 저역 통과 필터에 다음과 같은 입력을 넣었을 때 출력은 어떻게 되는지 구하라. 단 $R = 0.5[\Omega]$, $C = 0.1[F]$ 이다.

- (a) 직류(DC) (b) $\omega_0 = 15$ 인 정현파 (c) $\omega_0 = 98$ 인 정현파

<풀이>

주어진 입력의 주파수에 대해 필터 이득, 즉 진폭 응답 값을 구하면 된다. 진폭 응답은 주어진 소자 값들을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$|H(\omega)| = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega^2 + (\frac{1}{RC})^2}} = \frac{20}{\sqrt{\omega^2 + 20^2}}$$

- (a) 입력이 직류이므로 $\omega = 0$ 을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$|H(0)| = \frac{20}{\sqrt{0^2 + 20^2}} = 1$$

즉 직류는 크기가 변하지 않고 그대로 필터 출력으로 나타난다.

- (b) $\omega_0 = 15$ 을 진폭 응답 식에 대입하면,

$$|H(15)| = \frac{20}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = \frac{20}{25} = 0.8$$

이 정현파는 주파수가 통과대역 안에 있으나, 차단 주파수 $\omega_c = 1/RC = 20$ 에 가까우므로 크기가 약간(20%) 감소되어 필터 출력으로 나타난다.

(c) $\omega_0 = 98$ 을 진폭 응답 식에 대입하면,

$$|H(98)| = \frac{20}{\sqrt{98^2 + 20^2}} \simeq \frac{20}{100} = 0.2$$

이 정현파는 차단 주파수로부터 꽤 떨어져 있어서 크기가 많이 감소하긴 하였으나 그래도 작은 값(20%)이 출력에 포함된다. 즉 차단이 이루어지고 있지만 양호하진 않다.

이상의 결과를 보면 RC 저역 통과 필터가 필터링 동작을 하는 것은 분명하지만 특성이 썩 좋은 것은 아니라는 것을 확인할 수 있다. ■