제 5 장

이산 시스템의 시간 영역 해석

책의 ‘1절 임펄스 응답과 컨벌루션 표현’과 관련하여 FIR 및 IIR 시스템의 개념과 특징에 대해 예제와 함께 자세한 보충 설명을 덧붙였다. 그리고 임펄스 응답과 시스템 특성의 연관성 문제와 관련하여 특히 안정도에 대해 추가적인 설명을 제시하였으며, 계단 응답과 임펄스 응답의 관계에 대해서도 예제와 함께 보충 설명을 해두었다.

책의 ‘2절 컨벌루션 합의 계산과 성질’과 관련해서는 컨벌루션 계산의 그림에 의한 접근의 유용함을 풀어서 설명하고 컨벌루션 계산에 대한 이해가 쉽도록 예제를 보였다. 그리고 책에서 간단히 요약만 해둔 컨벌루션 합의 성질을 상세히 설명하였다.

책의 ‘3절 차분 방정식에 의한 이산 LTI 시스템 해석’과 관련하여 먼저 시스템의 직접형 구현도가 어떻게 얻어지는지 이해할 수 있도록 설명을 추가하였다. 또한 반복 대입법에 대한 간단한 보충 설명과 예제 뿐만 아니라 차분 방정식의 고전적 해법에 대한 여러 케이스의 예제들을 추가하여 이해를 돕도록 하였다.

그리고 책에서 충분히 제공하지 못한 차분 방정식의 풀이와 관련한 다양한 연습 문제들을 추가하여 배운 개념들을 확실히 다질 수 있도록 하였다.

5.1 임펄스 응답과 컨벌루션 표현

5.1.1 이산 시스템의 임펄스 응답

FIR 시스템과 IIR 시스템

입력의 평균값을 구하는 문제를 생각해보자. $m+1$개의 입력 신호를 누적하여 평균값을 구한다고 하면 입출력 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$y[n] = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} x[n-k] = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m+1}x[n-k] \tag{C5.1}$$

이 시스템의 임펄스 응답을 $h[n]$이라 하고 입출력 관계를 컨벌루션으로 나타내면 다음과 같다.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,x[n-k] \tag{C5.2}$$

총합 하한이 0이 된 것은 시스템이 인과적이기 때문이다.

식 (C5.1)의 m이 유한한 경우와 m이 매우 커서 무한대에 가까워지는 두 가지 경우로 나누어 살펴보자.

먼저 $m=q$로 유한한 경우, $\frac{1}{m+1} = h[k]$로 치환하면 식 (C5.1)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{q} h[k]\,x[n-k] \\ &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots + h[q]x[n-q] \end{aligned} \tag{C5.3}$$

식 (C5.3)은 임펄스 응답의 길이가 유한한 FIR 시스템의 컨벌루션 표현이다.

만약 $\frac{1}{m+1} = b_k$로 치환하게 되면 식 (C5.1)은 다음과 같이 이동 평균(MA) 항으로만 이루어진 차분 방정식이 된다.

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_q x[n-q] \tag{C5.4}$$

식 (C5.3)과 식 (C5.4)을 비교하면, 차분 방정식의 상수 계수 b_k가 FIR 시스템의 임펄스 응답 $h[k]$와 같으면 차분 방정식 표현과 컨벌루션 표현이 완전히 일치함을 알 수 있다. 다시 말해 *FIR 시스템의 차분 방정식은 입력의 이동 평균 항들로만 구성된다.*

m이 매우 클 경우에는 이런 방법으로 해서는 식 (C5.2)와 등가인 차분 방정식의 항의 개수가 무한히 커지므로 소용이 없다. 따라서, 컨벌루션 표현과 차분 방정식의 관계를 이끌어낼 수 있도록 식을 바꾸어 나타내보자. 직전의 출력 $y[n-1]$을 이용하여 식 (C5.1)을 다시 쓰면

$$y[n] = \frac{1}{m+1}\left(x[n] + \sum_{k=0}^{m} x[n-1-k] - x[n-m-1]\right) \tag{C5.5}$$

$$= y[n-1] + \frac{1}{m+1}x[n] - \frac{1}{m+1}x[n-m-1]$$

식 (C5.5)는 식 (C5.1)과 달리 m이 얼마가 되든지 간에 단지 3개의 항만을 사용하여 시스템의 입출력 관계를 차분 방정식 형태로 표현하고 있다.

이 예로부터 식 (C5.2)의 총합 상한이 ∞가 되는 *IIR 시스템은 식 (C5.5)와 같이 자기 회귀(AR) 항을 포함하는 차분 방정식으로 나타낼 수 있음*을 미루어 알 수 있다.

식 (C5.1)을 식 (C5.5)로 변환하는 데 m의 크기에 대한 특별한 조건이 없으므로 FIR 시스템의 경우에도 얼마든지 자기 회귀 항을 포함하는 차분 방정식으로 표현을 변환할 수 있으며, 실제 응용에서 그렇게 하는 것이 더 효율적인 경우도 많다.

■ 예제 C5-1 : *데이터 평활화(smoothing)*

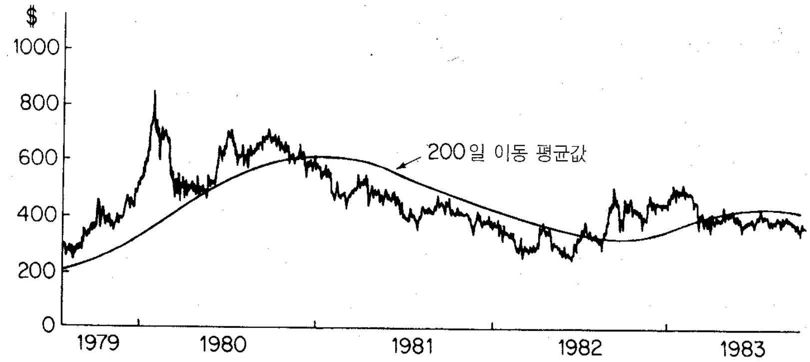
국제적으로 금이나 석유 등을 거래하는 현물 시장이나 주식 시장에서는 여러 요인들에 의해 매일 매시간 가격이 달라진다. 딜러들은 순간의 결정에 의해 엄청난 이익이나 손실이 발생할 수 있기 때문에 가격의 변동을 정확히 예측하기 위하여 필사적으로 애를 쓴다.

[그림 C5-1]은 달러로 표시된 금값의 변화를 1979년에서 1983년까지 일별로 나타낸 그래프이다. 그림에서 보듯이 금값은 작은 폭의 지속적인 변동과 큰 폭의 심한 기복을 모두 포함하는 복잡한 양상을 보인다. 이러한 패턴은 석유나 주식의 경우도 크게 다르지 않다.

가격의 변동을 예측하려면, 단기적인 변화뿐만 아니라 장기적인 변동 추이를 분석할 필요가 있다. 그림에 나타나 있는 부드러운 곡선은 정확히 일치하지는 않지만 장기간에 걸친 금값의 변화 추이를 잘 파악할 수 있게 해준다. 이처럼 원래 데이터의 복잡한 변화를 줄여서 데이터에 내재되어 있는 잠재적인 경향을 드러내는 부드러운 곡선을 찾아내는 일을 데이터 평활화라고 하는데, 기본적으로 널리 사용되는 기법은 적당한 기간 동안 누적된 데이터의 평균, 즉 이동 평균moving average을 취하는 방법이다.

그림의 부드러운 곡선은 현물 시장이나 주식 시장의 분석가들이 경험 법칙상 찾아낸 누적 기간인 200일 동안의 이동 평균을 취한 것으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y[n] = \frac{1}{200}\{x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-199]\} = 0.005\sum_{k=0}^{199} x[n-k] \tag{C5.6}$$



[그림 C5-1] 금의 달러화 값 1979-1983

만약 평균을 취하는 누적 기간을 달리 한다면 곡선의 형태도 달라질 것이며, 데이터에 따라 최적의 누적 기간을 찾아내는 일이 중요한 문제가 될 것이다.

그런데 식 (C5.6)은 $y[n]$ 값을 계산하기 위해서 매번 200개 데이터의 덧셈을 수행해야 하므로 계산상의 관점에서는 효율적이지 못하다. 보다 효율적인 계산 구조의 표현으로 바꾸려면 다음과 같이 직전의 계산 결과에서 가장 오래된 입력 데이터를 빼서 버리고 새로운 데이터를 더하면 될 것이다. 즉,

$$y[n] = \frac{1}{200}\{x[n]+\cdots+x[n-199]+x[n-200]-x[n-200]\} \qquad \text{(C5.7)}$$

$$= y[n-1]+0.005\{x[n]-x[n-200]\}$$

여기서

$$y[n-1] = \frac{1}{200}\{x[n-1]+\cdots+x[n-199]+x[n-200]\} \qquad \text{(C5.8)}$$

식 (C5.8)의 계산은 각 한 번의 덧셈과 뺄셈만 필요로 하므로 식 (C5.7)에 비해 계산량 측면에서 매우 효율적이다. 식 (C5.8)과 같은 형태의 계산 알고리즘(또는 필터)은 직전의 계산 값이 다시 새로운 계산을 위한 입력으로 사용되므로 **순환**recursive 알고리즘이라고 한다. 이에 반해 식 (C5.7)과 같이 이전의 계산 값을 전혀 사용하지 않는 알고리즘은 **비순환**nonrecursive 알고리즘이라고 한다. ■

5.1.3 임펄스 응답과 시스템의 주요 특성

점근적 안정도

점근적 안정도는 외부의 입력이 관여하지 않을 때 시간이 지남에 따라 시스템이 특정한 (초기) 상태에서 평형 상태, 즉 영상태로 가는 성질이다. 입력이 인가되지 않는 경우 시스템의

응답은 영입력 응답뿐인데, 이것은 시스템 모드 항들로 이루어져 있다. 그런데 시스템 모드 항들은 지수 함수 형태로 다음과 같이 특성근의 값에 의해 시간이 지남에 따라 감소하거나 증가하는 양상을 보인다.

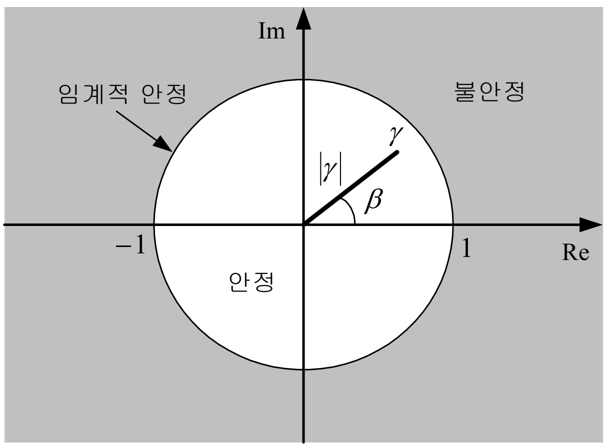
$$\lim_{n\to\infty}|\gamma_i^n| = \begin{cases} 0, & |\gamma_i|) < 1 \\ \infty, & |\gamma_i| > 1 \end{cases} \tag{C5.9}$$

따라서 시스템이 점근적 안정이기 위한, 다시 말해 $n\to\infty$로 접근함에 따라 시스템이 영상태로 가기 위한 조건은 시스템 모드가 지수 감소적일 것, 즉 $|\gamma_i|<1$이어야 한다. 반면에 $|\gamma_i|>1$의 경우는 $n\to\infty$로 접근함에 따라 시스템 응답은 계속 증가하게 되어 불안정해진다.

이 결과는 BIBO 안정도에서 얻은 결론과도 부합한다. 임펄스 응답 역시 시스템 모드 항들로 이루어지므로, (책)식 (5.12)의 BIBO 안정을 위한 절대 총합 가능 조건을 만족시키려면 시스템 모드가 지수 감소적일 것, 즉 $|\gamma_i|<1$이어야 한다. 그러므로 시스템이 점근적으로든 BIBO 관점으로든 안정할 조건은 특성 방정식의 특성근이 $|\gamma_i|<1$을 만족해야 한다. 이를 복소평면에 그림으로 나타내면 [그림 C5-2]와 같이 된다. 즉 복소평면 상의 단위원 내부에 특성근이 존재하면 안정, 외부에 존재하면 불안정이 된다.

단위원상에 특성근이 존재하게 되면, 즉 $|\gamma_i|=1$이면, 임펄스 응답을 이루는 시스템 모드가 정현적으로 진동하게 되어 평형 상태가 존재하지 않을뿐더러 (책)식 (5.12)의 BIBO 안정 조건을 만족시키지도 못한다. 그러므로 일반적으로는 불안정한 경우로 분류되는데, 특별히 이 경우를 안정과 불안정의 경계로 보아 별도로 임계[marginally] 안정이라고도 한다.

그러나 다중근인 특성근이 단위원상에 존재하면 시스템은 무조건 불안정하다. 왜냐하면, 이 경우 시스템 모드에 $n^{m-1}\gamma^n$의 꼴이 포함되어 $n\to\infty$로 됨에 따라 $\left|n^{m-1}\gamma^n\right|=n^{m-1}\to\infty$가 되어 발산하기 때문이다.



[그림 C5-2] 특성근의 위치와 시스템 안정도

계단 응답

임펄스 응답 이상으로 시스템의 특성을 파악하는 데 매우 유용하게 사용되는 것이 바로 (단위) 계단 응답이다. 계단 응답은 말 그대로 계단 신호를 입력으로 할 때의 시스템 응답으로서, 물리적으로는 직류, 즉 시간에 따른 변화가 전혀 없는 신호에 대한 시스템의 동작 특성을 나타낸다. 따라서 가장 기본적이고 대표적인 시험 신호로 널리 이용되고 있다.

■ 예제 C5-2 : *시스템의 계단 응답*

다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 인과 LTI 시스템의 임펄스 응답과 계단 응답을 구하라.

$$y[n]-0.5y[n-1]=x[n]$$

<풀이>

먼저 이 시스템의 임펄스 응답을 구해보자. 주어진 차분 방정식의 특성 방정식이 다음과 같으므로

$$\gamma-0.5=0$$

특성근은 $\gamma=0.5$가 된다. 따라서 임펄스 응답은

$$h[n]=c(0.5)^n$$

이 되는데, 차분 방정식으로부터 $n=0$에 대해 $h[0]=1$을 얻어 위의 식에 대입하면 $c=1$이 된다. 그러므로 임펄스 응답은 다음과 같다.

$$h[n]=(0.5)^n, \qquad n \geqq 0 \tag{C5.10}$$

이제 이 시스템의 계단 응답을 구해보자. 동차해는 앞에서 구하였으므로 입력 $x[n]=u[n]$에 대한 특이해만 구하면 된다. $s_p[n]=c_0$라 두고 차분 방정식에 대입하면

$$c_0-0.5c_0=1$$

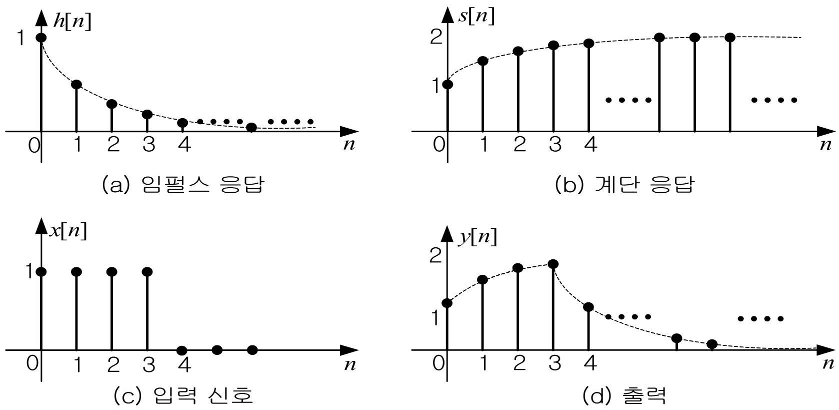
따라서 $c_0=2$, 즉 $s_p[n]=2$가 된다. 그러므로 계단 응답은 다음과 같고

$$s[n]=s_h[n]+s_p[n]=c(0.5)^n+2$$

주어진 차분 방정식으로부터 $n=0$에 대해 $s[0]=1$을 얻어 위의 식에 대입하면 $c=-1$이 된다. 그러므로 계단 응답은 다음과 같다.

$$s[n]=-(0.5)^n+2, \qquad n \geqq 0 \tag{C5.11}$$

[그림 C5-3]의 (a)와 (b)에 이렇게 구한 임펄스 응답과 계단 응답을 나타내었다.



[그림 C5-3] [예제 C5-2]의 임펄스 응답, 계단 응답, 입력 및 출력

임펄스 응답과 계단 응답이 과연 (책)식 (5.15)와 (책)식 (5.14)의 관계를 만족하는지 알아보자. 식 (C5.10)과 식 (C5.11)을 이용하여 임펄스 응답과 계단 응답의 처음 몇 샘플의 값을 구해보면 다음과 같이 된다.

$$
\begin{array}{ll}
h[0] = 1 = s[0] - s[-1] & s[0] = 1 = h[0] \\
h[1] = 0.5 = s[1] - s[0] & s[1] = 1.5 = h[0] + h[1] \\
h[2] = 0.25 = s[2] - s[1] & s[2] = 1.75 = h[0] + h[1] + h[2] \\
h[3] = 0.125 = s[3] - s[2] & s[3] = 1.875 = h[0] + h[1] + h[2] + h[3] \\
\vdots &
\end{array}
$$

따라서 (책)식 (5.14)와 (책)식 (5.15)의 관계를 만족함을 알 수 있다.

만약 시스템에 그림의 (c)와 같은 신호를 입력으로 넣으면 출력은 어떻게 될까? (c)의 신호는 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$x[n] = u[n] - u[n-4]$$

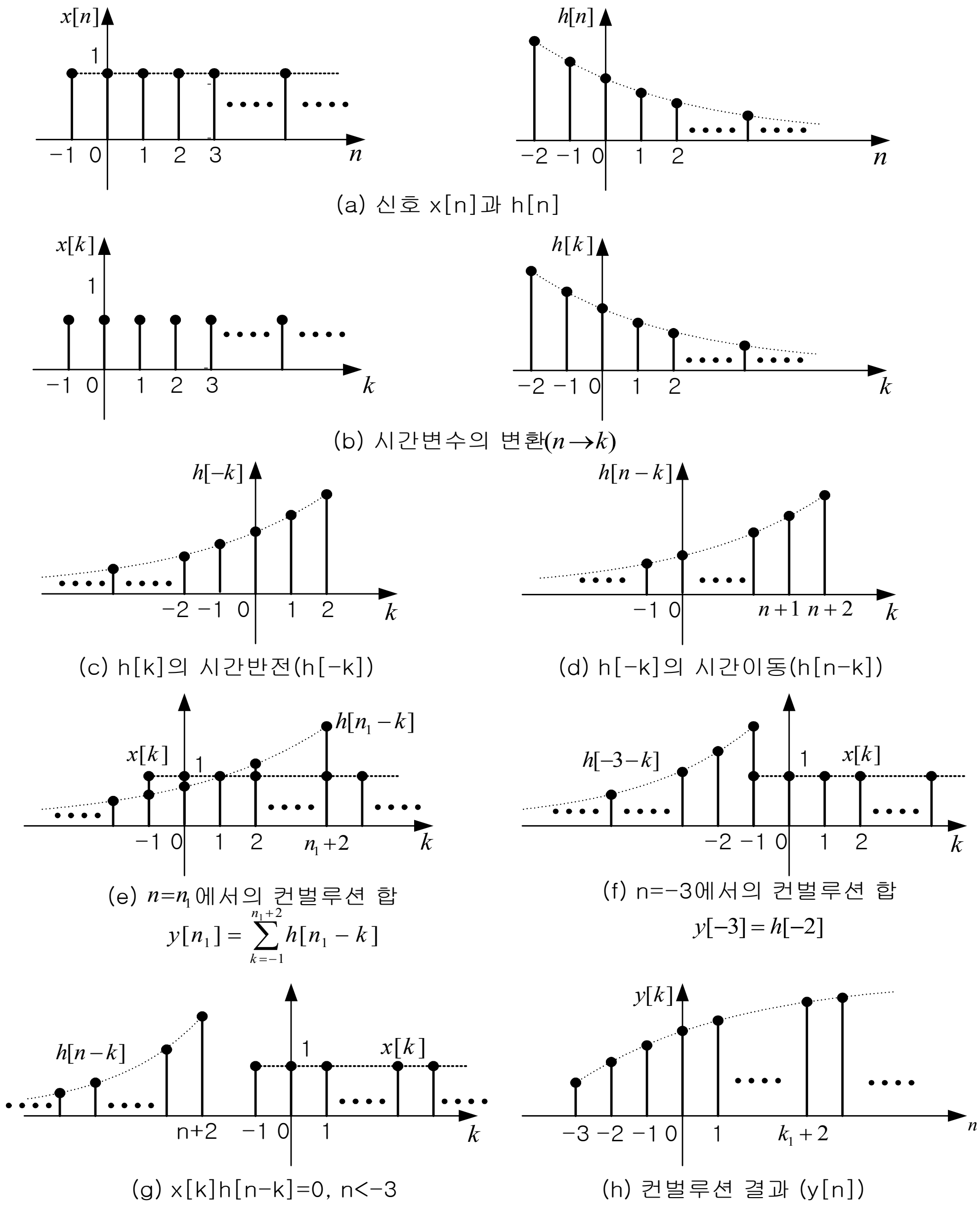
시스템의 출력은 계단 응답을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y[n] = s[n] - s[n-4] = (-(0.6)^n + 2)u[n] - (-(0.8)^{n-4} + 2)u[n-4] \qquad \blacksquare$$

5.2 컨벌루션 합의 계산과 성질

5.2.1 컨벌루션 합의 계산

컨벌루션은 두 신호 중 하나를 뒤집어 시간 $-\infty$에서부터 미끄러뜨려 오른쪽으로 끌고 오면서 매 시간 순간마다 고정 신호와 곱한 결과를 모든 더하여 그 순간의 계산 값으로 취하는 연산으로서, 계산이 진행되는 시간축과 결과가 표시되는 시간축을 혼동하면 안 된다는 것을 강조한 바 있다.
이를 좀 더 자세히 알아보기 위해 먼저 [그림 C5-4]의 경우를 살펴보자.



[그림 C5-4] 컨벌루션 합의 도해적 설명

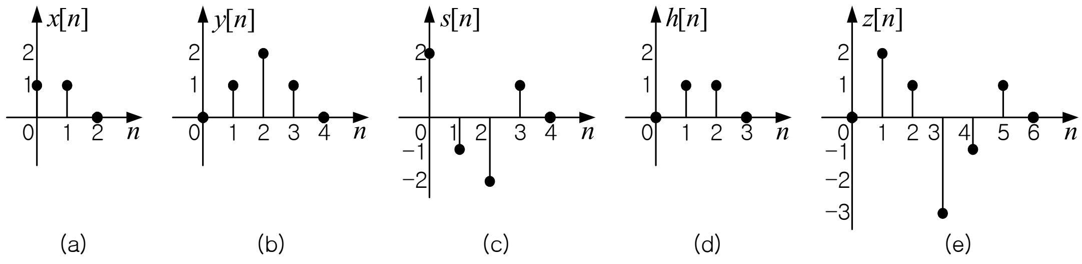
우선 그림 (a)에 주어진 신호 $x[n]$와 $h[n]$에 대해 (b)와 같이 시간 변수를 k로 변환한 뒤, (c)에서처럼 두 신호 중 하나(여기서는 $h[k]$)를 시간 반전시키면 $h[-k]$가 된다. 그런 다음 이를 n만큼 이동시키면 (d)와 같이 $h[n-k]$가 얻어진다. $h[n-k]=h[-(k-n)]$이므로 n이 양의 값이면 오른쪽으로 이동하고 음의 값이면 왼쪽으로 이동된다.

특정한 시간 $n=n_1$에서의 컨벌루션 값 $y[n_1]$은 (e)의 그림처럼 두 신호 $x[k]$와 $h[n_1-k]$를 곱하여 얻어진 결과의 각 샘플 값들을 전부 더한 것으로서, $y[n_1]$은 (h)에 보인 것처럼 시간 축을 n으로 하는 평면에 표시된 $y[n]$ 곡선 상의 한 점이 된다. 다시 n 값을 변화시켜 같은 작업을 반복하면 $y[n]$ 곡선 상의 또 다른 점의 값을 얻을 수 있다.(그림 (f)) 그런데 $n<-3$이면 $x[k]$와 $h[n-k]$가 겹치는 부분이 없어서 구태여 컨벌루션 계산을 수행할 필요가 없음을 알 수 있으며(그림 (g)), 보통의 경우에는 이 과정을 $-\infty$와 $+\infty$ 사이의 모든 n 값에 대해 반복함으로써 완전한 컨벌루션 결과 $y[n]$을 구하게 된다.(그림 (h))

이처럼 그림을 이용하면 컨벌루션 계산을 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

■ 예제 C5-3 : *미끄럼 방식에 의한 컨벌루션 계산*

이산 LTI 시스템에 [그림 C5-5(a)]의 $x[n]$을 입력으로 넣었을 때 출력이 [그림 C5-5(b)]의 $y[n]$과 같이 되는 이산 LTI 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$을 구하고, 이를 이용하여 [그림 C5-5(c)]의 $s[n]$을 입력으로 할 때의 시스템 출력 $z[n]$을 구하라.



[그림 C5-5] [예제 C5-3]의 신호들

<풀이>

먼저 임펄스 응답을 구하기 위해 $x[n]$을 임펄스 성분으로 분해해보면 $x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$이다. 이에 대한 출력은 $y[n]=h[n]+h[n-1]$이 된다. 여기에 n을 1씩 증가시켜가며 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$
\begin{array}{lll}
n=0 & : \; y[0]=h[0]=0 & \therefore h[0]=0 \\
n=1 & : \; y[1]=h[1]+h[0]=1 & \therefore h[1]=1 \\
n=2 & : \; y[2]=h[2]+h[1]=2 & \therefore h[2]=1 \\
n=3 & : \; y[3]=h[3]+h[2]=1 & \therefore h[3]=0
\end{array}
$$

이렇게 구해진 임펄스 응답 $h[n]$을 [그림 C5-5(d)]에 나타내었다.

이제 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$을 알고 있으므로 입력 $s[n]$에 대한 시스템 출력 $z[n]$을 컨벌루션을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$z[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{3} s[k]\,h[n-k]$$

이 컨벌루션에 대한 미끄럼 방식 계산표를 작성하면 [표 C5-1]와 같고, 이에 의해 구해진 출력 $z[n]$을 [그림 C5-5(e)]에 보였다.

[표 C5-1] [예제 C5-3]의 미끄럼 방식 컨벌루션 계산표

	$n \diagdown k$	0	1	2	3	
$s[k]$		2	-1	-2	1	$z[n]$
$h[n-k]$	1	1				2
	2	1	1			1
	3		1	1		-3
	4			1	1	-1
	5				1	1

[표 C5-1]의 작성은 칸이 질러진 두 개의 테이프에 하나는 왼쪽 끝에서부터 각 칸에 순서대로 $s[k]$의 값을 적고(2 | -2 | -1 | 1) 다른 하나는 정반대로 오른쪽 끝에서부터 순서대로 $h[k]$의 값을 적어(1 | 1) $h[k]$의 값이 적힌 테이프를 $s[k]$의 값이 적힌 테이프 아래에 두고 오른쪽으로 한 칸씩 미끄러뜨리면서 그때마다 겹쳐지는 값들을 곱해서 모두 더해 새로운 테이프에 차례로 적어 넣는 동작과 동일하다.

계산표를 작성하든지 테이프를 이용하든지 어느 경우이든 간에 컨벌루션되는 두 신호의 겹침이 시작되고 끝나는 n값을 미리 알면 편한데, 이것은 컨벌루션의 길이와 끝에 대한 성질을 이용하면 된다. ■

5.2.2 컨벌루션 합의 성질

교환 법칙

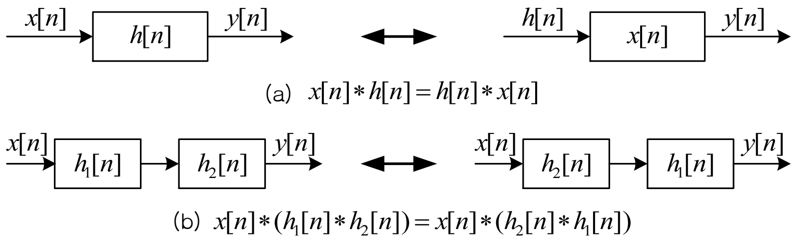
컨벌루션 합은 두 신호 $x[n]$과 $h[n]$에 대해 다음과 같이 교환법칙이 성립한다.

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \qquad \text{(C5.12)}$$

교환법칙에 따르면, 컨벌루션 계산에서 두 신호 중 어느 것을 뒤집어도 상관없다. 그러므로 계산을 더 간편하게 만들어주는 신호를 뒤집어서 연산을 수행하면 된다.

시스템의 측면에서 교환 법칙은 [그림 C5-6(b)]에 나타낸 것처럼 두 개의 시스템이 종속 연결되어 있을 경우 시스템의 연결 순서를 바꾸어도 입력에 대한 출력은 바뀌지 않는다는

의미로 주로 활용된다.



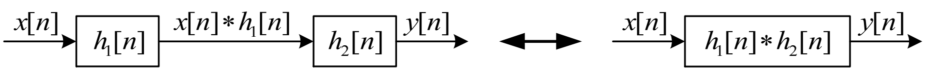
[그림 C5-6] 컨벌루션의 교환 법칙의 물리적 의미

결합 법칙

셋 또는 그 이상의 신호에 대한 컨벌루션의 결과는 조합된 컨벌루션의 계산 순서에 영향을 받지 않는다. 즉 다음과 같이 결합 법칙이 성립한다.

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \;=\; x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \qquad \text{(C5.13)}$$

결합 법칙은 [그림 C5-7]에 나타낸 것처럼, 두 개의 시스템이 종속 연결되어 있을 경우 두 시스템의 임펄스 응답에 대한 컨벌루션을 임펄스 응답으로 갖는 하나의 시스템으로 대체할 수 있음을 의미한다.



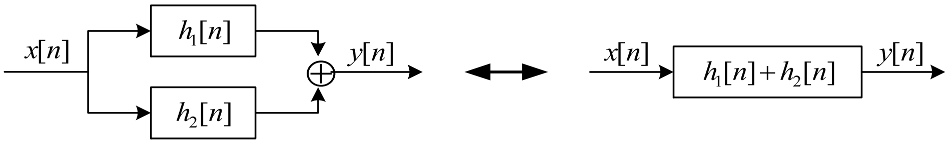
[그림 C5-7] 컨벌루션의 결합 법칙의 물리적 의미

배분 법칙

컨벌루션은 다음과 같이 덧셈에 대한 배분 법칙을 만족한다.

$$x[n] * (h_1[n]+h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \qquad \text{(C5.14)}$$

배분법칙은 [그림 C5-8]에 나타낸 것처럼, 두 개의 시스템이 병렬로 연결되어 있을 경우 각 시스템의 임펄스 응답을 더한 것을 새로운 임펄스 응답으로 갖는 하나의 시스템으로 대체할 수 있음을 의미한다.



[그림 C5-8] 컨벌루션의 배분 법칙의 물리적 의미

이동 성질

$y[n] = x[n] * h[n]$이라 하면, 컨벌루션은 다음과 같은 이동 성질을 만족한다.

$$y[n-n_0] = x[n-n_0] * h[n] \qquad \text{(C5.15)}$$

이동 성질은 시스템에 입력을 n_0만큼 시간 이동시켜 인가하면, 동일한 형태의 출력이 n_0만큼 시간 이동되어 나온다는 시불변성을 나타낸다.

임펄스와의 컨벌루션

신호 $x[n]$을 임펄스 $\delta[n-n_0]$와 컨벌루션한 결과는 임펄스의 체 거르기 성질에 의해 다음과 같이 된다.

$$x[n] * \delta[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-n_0-k] = x[n-n_0] \qquad \text{(C5.16)}$$

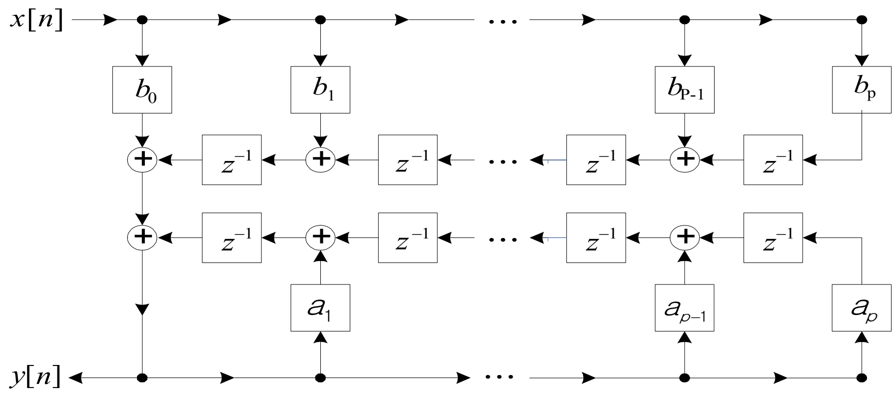
즉 신호 $x[n]$를 임펄스 $\delta[n-n_0]$와 컨벌루션하는 것은 $x[n]$을 n_0만큼 시간 이동시키는 것과 같다. 특별히 $n_0 = 0$인 경우에는 $x[n] * \delta[n] = x[n]$이 되는데, 이는 물리적으로는 임펄스 응답이 $h[n] = \delta[n]$인 시스템이 항등 시스템^identity system^임을 의미한다.

5.3 차분 방정식에 의한 이산 LTI 시스템 해석

5.3.1 차분 방정식에 의한 이산 LTI 시스템의 표현

제2 직접형 구현도

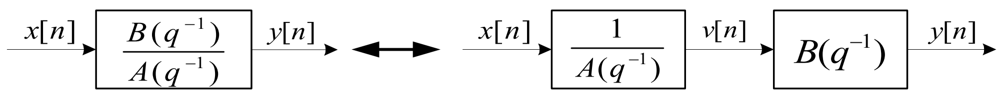
제2 직접형 구현도는 (책)[그림 5-10(c)]의 제1 직접형 구현도를 아래의 [그림 C5-9]와 같이 시간 지연과 곱셈의 순서를 바꾼 뒤에 시간 지연기열을 공통으로 묶으면 얻어진다.



[그림 C5-9] 제1 직접형에서 시간 지연과 곱셈 순서를 바꾼 구현도

전치 제2 직접형 구현도

이산 시스템의 전치 제2 직접형 구현도는 [그림 C5-10]과 같이 시스템을 두 개의 부시스템의 종속 연결로 간주하여 이를 구현한 것이다.



[그림 C5-10] 전치 제2 직접형 구현도를 위한 등가 시스템

즉 $v[n] = \dfrac{1}{A(q^{-1})}x[n]$을 $v[n]$에 관해 정리한 (책)식 (5.22)와 $y[n] = B(q^{-1})v[n]$을 각각 구현한 뒤 시간 지연기를 공통으로 묶으면 전치 제2 직접형 구현도가 얻어지게 된다.

5.3.2 차분 방정식과 반복 대입법

■ 예제 C5-4 : *차분 방정식의 반복 대입법 풀이*

다음의 차분 방정식을 $x[n] = n^2$, $y[-1] = 16$의 경우에 대해 반복적으로 풀어라.

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]$$

<풀이>
이 식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$y[n]=0.5y[n-1]+x[n]$$

위 식에서 $n=0$으로 놓으면 다음을 얻는다.

$$n=0\ :\ y[0]=0.5y[-1]+x[0]=0.5(16)+0=8$$

다음 $n=1$로 두고, 위에서 계산된 $y[0]=8$과 $x[1]=1^2=1$을 이용하면 다음을 얻는다.

$$n=1\ :\ y[1]=0.5y[0]+x[1]=0.5(8)+1^2=5$$

이 방법을 계속 반복하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} n=2:\ & y[2]=0.5y[1]+x[2]=0.5(5)+2^2=6.5 \\ n=3:\ & y[3]=0.5y[2]+x[3]=0.5(6.5)+3^2=12.25 \\ & \vdots \end{aligned}$$

■

■ 예제 C5-5 : *예금 복리 계산과 반복 대입법*
어떤 사람이 은행에서 계좌를 개설하여 월이율 r로 매월 초에 정기적으로 예금하면, 통장에 이자를 포함한 계좌의 총 잔고가 바로 표시된다고 한다. 이때 매월 초 예금한 직후의 계좌 잔고를 나타내는 차분방정식을 구하라. 그리고 매월 예금액이 10만 원이고 월이율이 1%인 경우에 대해 구한 차분방정식을 이용하여 처음 3개월의 계좌 잔고를 계산하라.

<풀이>
n번째 월 초에 불입하는 예금액을 $x[n]$, 이 예금액이 입금된 직후에 계산된 총 잔고를 $y[n]$이라 하면, 총 잔고는 직전 월의 총 잔고 $y[n-1]$과 이에 대한 한 달 동안의 이자 수입 $ry[n-1]$, 그리고 n번째 월에 입금한 예금액의 합이 되므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y[n]=y[n-1]+ry[n-1]+x[n]=(1+r)y[n-1]+x[n]$$

이때 매월 예금액이 10만 원이고 월이율이 1%이면 $x[n]=10$(만 원), $n\geqq 0$이고 $r=0.01$에 해당된다. 계좌를 개설하기 이전에는 잔액이 없으므로 $y[-1]=0$이다. 따라서 첫 예금이 이루어진 직후의 잔액은 위의 차분방정식에 $n=0$으로 두어 다음과 같이 구하면 된다.

$$n=0\ :\ y[0]=1.01y[-1]+x[0]=1.01(0)+10=10$$

그 다음 달부터 총 잔액은 n을 1씩 증가시키며 계산 결과를 반복적으로 대입하여 풀면 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
n=1 \ &: \ y[1]=1.01y[0]+x[1]=1.01(10)+10=20.1 \\
n=2 \ &: \ y[2]=1.01y[1]+x[2]=1.01(20.1)+10=30.301 \\
n=3 \ &: \ y[3]=1.01y[2]+x[3]=1.01(30.301)+10=40.604 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

이 방법은 간단한 계산으로 해를 쉽게 구할 수 있다는 점에서는 유용하지만, 초기의 몇몇 값이 아니라 $y[60]$과 같이 한참 뒤의 값을 알고자 할 경우에는 $n=60$이 될 때까지 계산 과정을 되풀이해야만 하는 불편한 점도 있다. 이럴 때 닫힌 꼴의 해를 안다면 $n=60$을 대입하여 바로 계산할 수 있으므로 편리할 것이다.

이 예제의 경우와 같이 1차 또는 2차 정도의 간단한 차분 방정식이라면 반복적 대입법을 이용하여 닫힌 꼴의 해를 어렵지 않게 구할 수도 있다. 예금 잔고에 대한 차분 방정식을 다시 쓰면

$$y[n]=(1+r)y[n-1]+x[n]$$

위 식에 n을 1씩 증가시키며 계산을 진행하되, 변수에 그 값을 바꾸어 넣지 않고 그대로 둔 채 다음 단계의 계산에 대입하는 과정을 반복하면 닫힌 꼴의 해를 얻을 수 있다. 즉 $n=0$의 경우

$$y[0]=1.01y[-1]+x[0]$$

$n=1$로 증가시킨 뒤 위의 결과를 다시 차분 방정식에 대입하면

$$y[1]=1.01y[0]+x[1]=1.01(1.01y[-1]+x[0])+x[1]$$

이를 계속 반복하면

$$
\begin{aligned}
y[2]&=1.01y[1]+x[2]=1.01(1.01^2y[-1]+1.01x[0]+x[0])+x[2] \\
y[3]&=1.01y[2]+x[3]=1.01(1.01^3y[-1]+1.01^2x[0]+1.01x[1]+x[2])+x[3] \\
&\vdots \\
y[n]&=(1.01)^{n+1}y[-1]+(1.01)^n x[0]+(1.01)^{n-1}x[1]+\cdots+1.01x[n-1]+x[n] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

이로부터 닫힌 꼴의 $y[n]$은 다음과 같이 얻어진다.

$$y[n]=(1.01)^{n+1}y[-1]+\sum_{i=0}^{n}(1.01)^i x[n-i]$$

차분 방정식의 차수가 높아지면 이런 식으로 닫힌 꼴 해를 구하기가 매우 복잡하고 힘들기 때문에 잘 사용하지 않고 해석적인 방법을 이용한다. ■

5.3.3 차분 방정식의 고전적 해법

■ 예제 C5-6 : *차분 방정식의 동차해 - 토끼 인구 증가 문제*

토끼 1쌍이 매달 새끼 1쌍을 낳고 생후 1개월이면 임신 가능하다고 한다. 첫 번째 달에 토끼 1쌍이 있을 때 n번째 달의 토끼 쌍수를 구할 수 있는 차분 방정식을 세우고 이의 해를 구하라.

<풀이>

n번째 달 1일에서의 토끼 쌍수를 $y[n]$으로 표시하면, 이는 전달에 임신 가능한 토끼 쌍수의 2배에다 전달에 새로 태어난 토끼 쌍수를 더한 것이 된다. $n-1$번째 달 1일에 임신 가능한 토끼 쌍수는 그 전달의 토끼 쌍수와 같으므로 $y[n-2]$가 되고 $n-1$번째 달 1일에 새로 태어난 토끼 쌍수는 그 달의 토끼 쌍수에서 그 전달의 토끼 쌍수를 뺀 것이므로 $y[n-1]-y[n-2]$가 된다. 따라서 $y[n]$은 다음과 같이 된다.

$$y[n]=2y[n-2]+y[n-1]-y[n-2]=y[n-1]+y[n-2] \qquad \text{(C5.17)}$$

이를 정리하여 다시 쓰면

$$y[n]-y[n-1]-y[n-2]=0$$

위 식의 특성 방정식은 $Q(\gamma)=\gamma^2-\gamma-1=0$이고, 특성근은 $\gamma=(1\pm\sqrt{5})/2$ 가 된다. 따라서 해는 다음과 같이 구해진다.

$$y[n]=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

이 문제의 경우 초기 조건은 $y[0]=0,\ y[1]=1$이므로 위 식에 대입하면

$$\begin{cases} y[0]=c_1+c_2=0 \\ y[1]=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \end{cases}$$

이를 풀면

$$\begin{cases} c_1=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

따라서 이 문제의 해는 다음과 같이 된다.

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

이 결과를 이용하든지 식 (C5.17)을 이용하든지 $y[n]$의 처음의 몇 개 값을 계산해보면,

$$y[1]=1,\ y[2]=1,\ y[3]=2,\ y[4]=3,\ y[5]=5,\ y[6]=8,\ \cdots$$

이는 여러분들이 잘 알고 있는 유명한 피보나치[Fibonacci] 수열로서, 어떤 순간의 값은 식 (C5.17)과 같이 직전의 2개 값의 합으로 구해진다. ■

■ 예제 C5-7 : *동차해와 과도 응답 - 물탱크의 수위 데이터 필터링*
물탱크의 수위를 매 10분마다 측정하여 1[cm] 단위로 LCD창에 표시하는 시스템이 있다. 측정된 수위 정보는 LCD창에 표시되기 전에 물의 출렁임 등 원하지 않는 측정 잡음을 줄이기 위해 다음과 같이 차분 방정식으로 표현되는 디지털 필터에 의해 필터링 과정을 거치게 된다고 한다.

$$y[n] - 0.5y[n-1] = 0.5x[n] \qquad \text{(C5.18)}$$

물이 공급되기 직전의 수위가 4[cm]이고, 물이 공급되면 10분에 1[cm]씩 수위가 높아진다고 할 때, LCD 창에 표시되는 수위는 어떻게 되는지 구하라.

<풀이>
식 (C5.18)의 특성 방정식은 $\gamma - 0.5 = 0$이므로 특성근은 $\gamma = 0.5$가 되고, 동차해는 다음과 같다.

$$y_h[n] = c(0.5)^n$$

문제의 조건에서 수위의 측정값, 즉 디지털 필터의 입력은 $x[n] = 4+n$으로 쓸 수 있으므로, 특이해를 $y_p[n] = c_1 n + c_0$라 두고 이를 차분 방정식에 대입하면

$$(c_1 n + c_0) - 0.5(c_1(n-1) + c_0) = 0.5(n+4)$$

이를 정리하여 양변을 비교하면 $c_1 = 1,\ c_0 = 3$이 되므로 특이해는 다음과 같다.

$$y_p[n] = n+3$$

따라서 디지털 필터의 출력은 다음과 같이 되고

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c(0.5)^n + n + 3$$

차분 방정식에 $n=0$로 두어 얻어진 초기 조건 $y[0]=2$를 위의 식에 대입하면 $c=-1$을 얻게 된다. 그러므로 디지털 필터의 출력, 즉 LCD창에 표시되는 수위는 다음과 같게 된다.

$$y[n]=-(0.5)^n+n+3$$

[그림 C5-11]에 디지털 필터의 동차해와 특이해, 그리고 전체 출력을 보였다. 그림에서 시간이 지남에 따라 동차해 성분은 점점 줄어들어 사라지는 것을 볼 수 있다. 이것은 이 디지털 필터의 동차해 성분이 과도 응답임을 의미한다.

만일 물을 공급하기 시작하는 순간의 물탱크의 수위에 따라 디지털 필터의 출력에는 동차해 성분이 포함되지 않을 수도 있다고 한다면, 다시 말해 과도현상이 전혀 발생하지 않는 매우 특이한 경우의 초기 수위를 한번 구해보자.

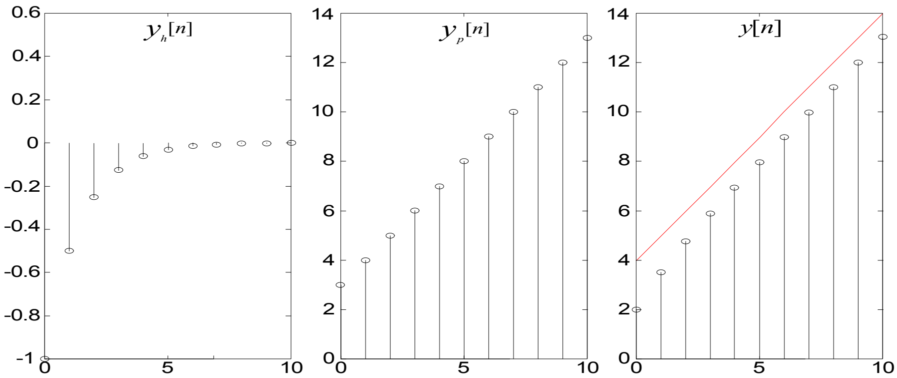
물을 공급하기 시작한 순간의 수위를 모르므로 측정 수위를 $x[n]=n+c$라고 두자. 디지털 필터의 출력은 특이해 성분만 가지므로 $y[n]=y_p[n]=an+b$이 되는데, 이 출력과 차분 방정식에 $x[n]$을 대입해 얻은 결과가 같아야 하기 때문에 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$n=0 \ : \ y[0]=0.5y[-1]+0.5x[0]=0.5c=b$$

$$n=1 \ : \ y[1]=0.5y[0]+0.5x[1]=0.75c+0.5=a+b$$

$$n=2 \ : \ y[2]=0.5y[1]+0.5x[2]=0.875c+1.25=2a+b$$

이를 a, b, c에 대해 풀면 $a=1$, $b=1$, $c=2$이므로 $x[n]=n+2$, $y[n]=n+1$이 된다. 다시 말해 물을 공급하기 시작할 때의 물탱크의 수위가 2[cm]이면 디지털 필터의 출력에는 동차해 성분이 포함되지 않아 과도현상 없이 바로 항상 측정값에서 1[cm]가 낮은 수위가 LCD 창에 표시된다. ■



[그림 C5-11] [예제 C5-7]의 디지털 필터의 출력