

MSE, 미적분학

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

Chapter 08 연습문제 답안

《Section 8.1》

1. (a) $(-1)^3 \frac{1}{7} + (-1)^4 \frac{1}{9} + (-1)^5 \frac{1}{11}$
 (b) $a_1 + 4a_2 + 9a_3$

2. (a) 발산
 (b) 발산

3. (a) $S_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$
 (b) $S_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$

4. $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots$
 급수의 합 = 1

5. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots, 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

6. 100

《Section 8.2》

$$1. \quad r = -\frac{1}{6}, a = -1, \\ S = \frac{-1}{(1 - (-\frac{1}{6}))} = -\frac{6}{7}$$

$$2. \quad r = -\frac{1}{4}, a = \frac{1}{4} \\ S = \frac{\frac{1}{4}}{(1 - \frac{1}{4})} = \frac{1}{5}$$

$$3. \quad r = \frac{3}{2} > 1 \text{ 이므로 급수는 } \infty \text{로 발산한다.}$$

$$4. \quad r = 3 > 1 \text{ 이므로 급수는 } \infty \text{로 발산한다.}$$

$$5. \quad r = 1/4 \text{ 이므로, } S = \frac{1/4^3}{1 - 1/4} = \frac{1}{48}$$

$$6. \quad a = \frac{1}{4}, r = \left(\frac{2}{3}\right)^2, S = \frac{1/4}{\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)} = \frac{9}{20}$$

$$7. \quad a = 0.1, r = 0.1, S = \frac{0.1}{(1 - 0.1)} = \frac{1}{9}$$

$$8. \quad r = \sin^2 \theta, S = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$$

$$9. \quad r = \frac{1}{\pi^2}, S = \frac{\pi}{(\pi^2 - 1)}$$

《Section 8.3》

1. (a) F (b) F (c) T (d) F

2. (a) $n \rightarrow \infty$ (b) $n \rightarrow \infty$

3. (a) $r = \frac{1}{3}$, 수렴
 (b) $p = 2$, 수렴
 (c) $p = \frac{1}{2}$, 발산
 (d) 수렴
 (e) 수렴
 (f) $p = 3$, 수렴
 (g) $p = 3/2$, 수렴
 (h) 발산
 (i) 발산
 (j) 수렴
 (k) 수렴
 (l) $p = 5$, 수렴
 (m) $r = 1/5$, 수렴
 (n) 수렴
 (o) $p = 2$, 수렴
 (p) 수렴
 (q) 수렴

4. (a) 발산
 (b) 수렴
 (c) 수렴
 (d) 발산

《Section 8.4》

1. 수렴

2.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[2(n+1)]!(3n)!}{[3(n+1)]!(2n)!} = \frac{(2n+2)!(3n)!}{(3n+3)!(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$
 수렴

3. $p = \frac{1}{3}$, 발산

4. $r = \frac{1}{3}$, 수렴

5. $\frac{n!}{10^n}$ 은 $n \rightarrow \infty$ 여도 0으로 가지 못한다.
 \therefore 발산

6. 발산

7. $p = 3$, 수렴

8. 조화수열이므로 발산

9.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n^2 \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{3}{4} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$
 이므로, $n \rightarrow \infty$ 이면 $\frac{3}{4}$ 로 수렴

10.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1}$$

 $n \rightarrow \infty$ 이면, 0으로 수렴

11. 발산

12. 발산

13. 발산

14.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} \frac{5^n}{n^2} = \frac{1}{5} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2$$

극한값은 $\frac{1}{5}$ 로 수렴

15. 수렴

16. 수렴

17. 수렴

18. 수렴

19. 수렴

20. 발산

21. 수렴

22. 수렴

23. 발산

24. 발산

25.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)!]} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

극한은 $\frac{1}{4}$ 로 수렴

26.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

극한은 $\frac{1}{3}$ 로 수렴

27. 수렴

28. 발산

29. 수렴

30. 발산

31. 발산

32. 수렴

33. 수렴

34. 수렴

35. $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots \geq \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} 1/u du = \ln u|_2^{\infty} = \infty$ 발산

36. (a) 발산

(b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

37. (a) $\sum a_n = \sum 1/n^2$ 이라면, $\sum na_n = \sum 1/n$ 은 발산
 $\sum a_n = \sum 1/n^3$ 이라면, $\sum na_n = \sum 1/n^2$ 은 수렴

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (수렴)

《Section 8.5》

1. 추정 오차 $= \frac{1}{\sqrt{n}}$, 작은 값

2. (a) $\frac{1}{n!}$ (작은 값)
 (b) $\frac{1}{n^n}$ (작은 값)

3. (a) 거짓
 (b) 참

4. (a) $\frac{n^2}{n!}$, 수렴
 (b) $\frac{n!}{n^n}$, 발산
 (c) $\frac{1}{n \ln n}$, 수렴
 (d) $\frac{2n}{n^2 + 4}$, 수렴
 (e) 수렴
 (f) 발산
 (g) $\frac{\sqrt{n-1}}{n}$, 수렴

5. (a) 참
 (b) 거짓

6. (a) 수렴
 (b) $p > 1$ 일 때 절대 수렴

7. (a) 조건부 수렴
 (b) 절대 수렴

8. (a) 조건부 수렴 또는 발산
 (b) 조건부 수렴

9. (a) 발산
 (b) 알 수 없다.
10. (a) 절대 수렴
 (b) 절대 수렴
11. (a) 절대 수렴
 (b) 절대 수렴

《Section 8.6》

1. $\frac{|(n+2)x^{n+1}|}{|(n+1)x^n|} = \frac{n+2}{n+1}|x|$ 이므로
 $n \rightarrow \infty$ 이면 $|x|$ 이다. 수렴하는 범위는 $|x| < 1$

2. $\frac{|x^{n+1}|}{|3^{n+1}(n+1)^2|} \left| \frac{3^n n^2}{x^n} \right| = \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 |x|$
 $n \rightarrow \infty$ 이면 $\frac{1}{3}|x|$ 이다.
 수렴하는 범위는 $\frac{1}{3}|x| < 1$ 이므로, $-3 < x < 3$

3. $\frac{|(n+1)!x^{n+1}|}{|n!x^n|} = (n+1)|x|$
 $x = 0$ 일 때 수렴

4. $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \left| \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{1}{n+1}|x|$
 $n \rightarrow \infty$ 이면 0이므로, 수렴 범위는 $(-\infty, \infty)$

5. $-1 < x < 1$

6. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

7. $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

《Section 8.7》

1. (a) $1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2 2!}x^2 + \frac{2 \cdot 5}{3^3 3!}x^3 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 4!}x^4 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
- (b) $x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
- (c) $1 - 3x + \frac{3 \cdot 4}{2!}x^2 - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!}x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
- (d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 + \frac{3^3}{2^4}x^3 + \dots \quad (-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3})$
- (e) $\frac{1}{3^6} - \frac{6}{3^7}x + \frac{6 \cdot 7}{3^8 2!}x^2 - \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3^9 3!}x^3 + \dots \quad (-3 < x < 3)$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(3^n - 1)x^n \quad (-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3})$
- (g) $-\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}x)^2 + \dots) \quad (-2 < x < 2)$
- (h) $\ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 4} + \dots \quad (-2 < x < 2)$

2. $1 + \frac{1}{2}(-3x^2) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}(-3x^2)^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}(-3x^2)^3 + \dots$
 $(x^2 < \frac{1}{3})$
 x^{34} 가 포함되는 항 : $-\frac{3^{17} \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n n!}x^{2n}$
 급수 : $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n n!}x^{2n}$

3. (a) $1 + x^2 + x^4 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
- (b) $1 + x^2 + x^4 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
- (c) $1 + x^2 + x^4 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
- (d) $1 + x^2 + x^4 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
- (e) $1 + x^2 + x^4 + \dots \quad (-1 < x < 1)$

4. (a) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
- (b) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$

5. (a) $C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 < x < 1)$

(b) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$

6. $x/(1-x)^2$

7. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^{n-1}} x^n$

(b) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots$

(c) $-2\ln(1 - \frac{1}{2}x)$

8. (a) $4(1 + \frac{3}{16})^{1/2} = 4 + 4(0.09375) - (4.0043945) + \dots$

(b) 수렴 구간이 $-1 < x < 1$ 이나, 현재 $x = 18$ 이므로 수렴구간을 벗어났음.

《Section 8.8》

1. $1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 + \dots$

2. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$

3. (a) $x + x^3/3! + x^5/5! + \dots$ (모든 x 에 대해 수렴)

(b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}x + \frac{2^2}{3^3}x^2 + \dots$ ($-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$)

4. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} / (2n+1)!$
 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} / (2n)!$

5. (a) $1 - \frac{3^2}{2!}x^2 + \frac{3^4}{4!}x^4 - \frac{3^6}{6!}x^6 + \dots$ (모든 x)

(b) $x^4 - x^6/3! + x^8/5! - \dots$ (모든 x)

(c) $1 + 4x + \frac{4^2}{2!}x^2 + \frac{4^3}{3!}x^3 + \dots$ (모든 x)

6. $\frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \dots$ (모든 x)

7. $\frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)}$ (모든 x)

8. $-x + x^3/3! - x^5/5! = -\sin x$

9. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

10. $\sin 1 = 1 - 1/3! + 1/5! - 1/7! + \dots$

11. (a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$ (근삿값보다 큰 값)

(b) $\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{20}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \dots$ (근삿값보다 작은 값)

12. (a) 2

(b) 1

13. e

《Section 8.10》

1. $\frac{1}{3}|x-4| < 1$

2. (a) $x = -8$
(b) $x < 0$

3. (a) $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$
($0 < x < 2$)
(b) $-(x-\pi) + (x-\pi)^3/3! - (x-\pi)^5/5! + \dots$
(모든 x)
(c) $e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \dots$
(모든 x)
(d) $-\frac{1}{5} + (x+1)/5^2 - (x+1)^2/5^3 + (x+1)^3/5^4 - \dots$
($-6 < x < 4$)
(e) $-\frac{1}{2} - (x+2)/2^2 - (x+2)^2/2^3 - (x+2)^3/2^4 - \dots$
($-4 < x < 0$)
(f) $3 + \frac{1}{2 \cdot 3}(x-9) - \frac{1}{3^2 2^2 2!}(x-9)^2 + \frac{3}{3^5 2^3 3!}(x-9)^3 - \frac{3 \cdot 5}{3^7 2^4 4!} + \dots$
($0 < x < 18$)
(g) $\frac{1}{9^5} - \frac{5}{9^6}(x-1) + \frac{5 \cdot 6}{9^7 2!}(x-1)^2 - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{9^8 3!}(x-1)^3 + \dots$
($-8 < x < 10$)
(h) $-1 + \frac{2^2}{2!}(x + \frac{1}{2}\pi)^2 - \frac{2^4}{4!}(x + \frac{1}{2}\pi)^4 + \frac{2^6}{6!}(x + \frac{1}{2}\pi)^6 - \dots$
(모든 x)
(i) $\ln 6 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2^2 \cdot 2}(x-2)^2 + \frac{1}{2^3 \cdot 3}(x-2)^3 - \frac{1}{2^4 \cdot 4}(x-2)^4 + \dots$
($0 < x < 4$)
(j) $-\frac{1}{7} - \frac{2}{7^2}(x+4) - \frac{2^2}{7^3}(x+4)^2 - \dots$
($-\frac{15}{2} < x < \frac{1}{2}$)

《복습문제》

1. (a) 수렴
 (b) 수렴
 (c) 발산
 (d) 발산
 (e) 발산
 (f) 수렴
 (g) 발산
 (h) 수렴
 (i) 발산
 (j) 수렴
 (k) 수렴
 (l) 수렴
 (m) 발산

2. $\frac{1}{9^5 - 9^3}$

3. $2^8/8!$, 작은 값

4. (a) 수렴
 (b) 발산

5. (a) 수렴
 (b) 수렴 또는 발산

6. $e^{a_n} \rightarrow 0, a_n \rightarrow -\infty$

7. (a) $\sum a_n, \sum b_n = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{3} + \dots$ (수렴)
 $\sum a_n b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ (발산)
 (b) $\sum b_n$ 이 수렴하면 $b_n \rightarrow 0$
 $a_n b_n < a_n, \sum a_n b_n$ 도 수렴

8. $-4 < x < 4$

9. (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}x + \frac{1}{3^3}x^2 + \frac{1}{3^4}x^3 + \dots \quad (-3 < x < 3)$
 (b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}x + \frac{1}{3^3}x^2 + \frac{1}{3^4}x^3 + \dots \quad (-3 < x < 3)$
 (c) $1 - 6x + \frac{(-6)(-7)}{2!}x^2 + \frac{(-6)(-7)(-8)}{3!}x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
 (d) $1 + (-x^6) + (-x^6)^2 + (-x^6)^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$
10. $f(x) = x^2e^x, f'(x) = x^2e^x + 2xe^x, f''(x) = x^2e^x + 4xe^x + 2e^x$
11. $\frac{1}{2}$
12. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + \frac{1}{2 \cdot 2!}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^3 + \dots$
 (모든 x)
 (b) $2 + \frac{2}{3 \cdot 8}(x - 8) - \frac{2 \cdot 2}{3^2 2! 8^2}(x - 8)^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 3! 8^3}(x - 8)^3 - \dots$
 ($0 < x < 16$)
13. $\frac{1}{5!19}, \text{ 큰 값}$
14. $x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{3}{2^2 2! 5}x^5 + \frac{3 \cdot 5}{2^3 3! 7}x^7 + \dots$