1장 정답 및 풀이

문제 정답

문제 1-1 (a)$x=3$ (b)$x=30$ (c)$x=2$ (d)$x=-3$

문제 1-2 (a)$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ (b)$\mathbb{C}$ (c)$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ (d)$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ (e)$\mathbb{R},\mathbb{C}$

문제 1-3 (a)21 (b)0 (c)$\frac{2}{27}$

문제 1-4 (a)$\frac{5}{6}$ (b)$\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$ (c)$\frac{31}{6}=5\frac{1}{6}$

문제 1-5 (a)$x=2$ (b)$x=25$ (c)$x=100$

문제 1-6 (a)$f^{-1}(x)=x^2, x=16$ (b)$g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\ln(x), x=0$

문제 1-7 (a)$(x-1)(x-7)$ (b)$(x+2)^2$

문제 1-8 (a)$a^2+2ab+b^2$ (b)$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
(c)$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ (d)$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

문제 1-9 $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-1$

문제 1-10 $x=\pm\sqrt{2}$

문제 1-11 (a)8 (b)$a^{-1}b^{-2}c^{-3}=\frac{1}{ab^2c^3}$ (c)$8\alpha^2$ (d)a^6b^{-2}

문제 1-12 (a)3 (b)12 (c) $\sqrt{3}$ (d)$|a|$

문제 1-13 (a)2π (b)$4+\frac{1}{4}=4.25$ (c)1 (d)x^2

문제 1-14 (a)$x=\sqrt{a}$ $x=-\sqrt{a}$ (b)$x=\sqrt[3]{b}$ (c)$x=\sqrt[4]{c}$, $x=-\sqrt[4]{c}$ (d)$x=\sqrt[5]{d}$

문제 1-15 $k_e=8.988\times10^9$

문제 1-16 (a)$\log(2xy)$ (b)$-\log(z)$ (c)$\log(y)$ (d)3 (e)-3 (f)4

문제 1-17 정의역:$x\in\mathbb{R}$. 치역:$f(x)\in[-2,2]$. 근:$\left[\ldots,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ldots\right]$

문제 1-18 (a)$p(x)$는 짝함수이고 차수는 4
(b)$q(x)$는 홀함수이고 차수는 7

문제 1-19 (a)$x=5$, $x=-3$ (b)$x=1+\sqrt{3}$, $x=1-\sqrt{3}$

문제 1-20 (a)$(q\circ f)(x)\equiv q(f(x))=(x+5)^2$, $q(x)$를 5만큼 왼쪽으로 옮긴 형태
(b)$(f\circ q)(x)=x^2+5$, $q(x)$를 위로 5만큼 옮긴 형태
(c)$(q\circ g)(x)=(x-6)^2$, $q(x)$를 오른쪽으로 6만큼 옮긴 형태
(d)$(q\circ h)(x)=49x^2$, $q(x)$를 수평하게 7배만큼 압축한 형태

문제 1-21 $A=5,\lambda=0.1$, $\phi=\frac{\pi}{8}$

문제 1-22 $f(x)=x^2-2x+5$

문제 1-23 $g(x)=2\sqrt{x-3}-2$

문제 1-24 $x = \sqrt{21}$
문제 1-25 $V = 33.51$, $A = 50.26$
문제 1-26 $x = 5\cos(45^\circ) = 3.54, y = 5\sin(45^\circ) = 3.54$, $C = 10\pi$
문제 1-27 (a) $\frac{\pi}{6}[rad]$ (b) $\frac{\pi}{4}[rad]$ (c) $\frac{\pi}{3}[rad]$ (d) $\frac{3\pi}{2}[rad]$.
문제 1-28 (a) -1 (b) 1 (c) 0
문제 1-29 (a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1
문제 1-30 자극의 길이 $= 5C = 5\pi d = 11.47[\mathrm{m}]$
문제 1-31 $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ 혹은 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1 + 3\cos\theta, y = 4 + 3\sin\theta, \theta \in [0, 2\pi)\}$.
문제 1-32 $x = 2, y = 3$
문제 1-33 $x = 5, y = 6, z = -3$
문제 1-34 $p = 7, q = 3$
문제 1-35 (a) 53974.14달러 (b) 59209.77달러 (c) 65948.79달러
문제 1-36 32563.11달러
문제 1-37 (a) {2,4,6,7} (b) {1,2,3,4,5,6} (c) {1,3,5} (d) $\varnothing$
(e) {1,2,3,4,5,6,7} (f) {7} (g) {2,4,6,7} (h) $\varnothing$.
문제 1-38 (a) $x \in (-\infty, \frac{3}{2})$ (b) $x \in (-\infty, -5]$ (c) $c \in (-1, 4)$
(d) $x \in (4, \infty)$ (e) $x \in [\frac{14}{3}, \infty)$ (f) $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$

선별된 문제 풀이

문제 1-4 (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$을 계산하기 위해, 두 분수의 공통분모 6으로 통분하여 계산하면 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$이 된다.
(b) (a)의 답을 사용하거나, 세 분수의 공통분모로 통분하여 합을 바로 계산할 수 있다.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$$

(c) $3\frac{1}{2}$을 $\frac{7}{2}$로 바꿔 쓸 수 있다. 공통분모 6으로 통분하여 계산하면 $\frac{7}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{21}{6} + \frac{12}{6} - \frac{2}{6} = \frac{31}{6}$이 된다.

문제 1-8 식 $(a+b)^n$의 다른 n값에 대한 계수는 **파스칼 삼각형**의 열에 해당한다. 파스칼 삼각형에 관한 위키피디아 페이지를 찾아 파스칼 삼각형의 일반 공식에 대해 살펴보고 파스칼 삼각형이 어떻게 구성되는지 흥미로운 애니메이션을 살펴보라.

문제 1-15 만약 매우 기본적 계산만 되는 계산기를 사용한다면, 분모의 식을 계산한 후 분수를 뒤집는다. 공학 기호를 지원하는 계산기는 “exp” 혹은 “E” 버튼을 갖고 있어, ϵ_0를 $8.854e-12$로 입력할 수 있다. 만약 계산기가 식을 지원한다면, 전체 식 $1/(4*\pi*8.854e-12)$을 타이핑할

수 있다. ϵ_0의 값을 4개 유효숫자의 정밀도로 시작했기 때문에 4개의 유효숫자로 답한다.

문제 1-19 (a) 우변으로 모든 항을 이항하여 방정식을 다시 쓰면 $0=x^2-2x-15$이다. 이 식을 인수분해 해보자. $a+b=-2$이고 $ab=-15$를 만족하는 수 a와 b가 존재하는가? 그렇다. $a=-5$이고 $b=3$이므로 $0=(x-5)(x+3)$이다.

(b) 좌변으로 모든 항을 이항하여 방정식을 다시 써라. $3x^2-6x-6=0$. 좋다. 3승 항은 사라진다! 이 방정식을 풀기 위해 2차 방정식의 근의 공식을 적용하면 $x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(3)(-6)}}{6}=\frac{6\pm 6\sqrt{3}}{6}=1\pm\sqrt{3}$이다.

문제 1-24 코사인 공식을 사용하면 $x^2=4^2+5^2-2(4)(5)\cos(60^\circ)=16+25-40\frac{1}{2}=21$이다. 따라서 $x=\sqrt{21}$이다.

문제 1-25 반지름이 $r=2$인 구의 부피는 $V=\frac{4}{3}\pi 2^3=33.51$이다. 구의 겉넓이는 $A=4\pi 2^2=50.26$이다.

문제 1-27 각도를 도에서 라디안으로 바꾸기 위해 변환 비율 $\frac{\pi}{180}[rad/^\circ]$을 곱해야 한다.

문제 1-35 (a) 매달 복리로 계산되므로, 먼저 달 이자율을 계산하면 $r=\frac{3\%}{12}=0.25\%=0.0025$이다. 10년 후 잭이 빚진 금액은 $\$40000(1.00025)^{120}=\$53974.14$가 된다.

(b) 유효 연이율 4%를 사용한 계산을 하면 $\$40000(1.04)^{10}=\$59209.77$이 된다.

(c) 명목 연이율 5%로 무한 반복적으로 복리가 계산되면, 매년 $\exp(\frac{5}{100})=1.051271$이다. 10년 후 잭이 빚진 금액은 $\$40000(1.051271)^{10}=\$65948.79$가 된다.

문제 1-36 두 가지 다른 이자율이 적용되므로 두 번의 계산을 수행해야 한다. 처음 5년이 끝날 때, 케이트는 $\$20000(1.06)^5=\$26764.51$을 빚지고 있다. 나머지 5년 동안 이자는 4%로 바뀌었으므로 10년 후 케이트의 빚은 $\$26764.51(1.04)^5=\$32563.11$이 된다.

문제 1-38 (a) 부등식의 양변을 2로 나누면 $x<\frac{3}{2}$이다.

(b) 양 변을 -4로 나누면 $x\le -5$이다. 음수로 나누었으므로 '$\ge$'을 '$\le$'으로 바꾸어야 하는 것을 주의하라.

(c) 만약 $(2x-3)$의 절댓값이 5보다 작다면, $(2x-3)$은 구간 $(-5,5)$ 내에 위치해야만 한다. 따라서 부등식을 $-5<2x-3<5$와 같이 다시 쓸 수 있다. 양변에 3을 더하면 $-2<2x<8$이 된다. 양변을 2로 나누면 $-1<x<4$이 된다.

(d) 우변에 있는 모든 x 항과 좌변에 있는 모든 상수를 모으면 $8<2x$이다. 따라서 $4<x$이다.

(e) 간단히 하기 위해, 부등식의 양변에 2를 더하면 $\frac{1}{2}x\ge\frac{1}{3}+2$이 된다. 분수를 어떻게 더하는지 회상하라. $\frac{1}{3}+2=\frac{1}{3}+\frac{6}{3}=\frac{7}{3}$을 얻고, 따라서 $\frac{1}{2}x\ge\frac{7}{3}$이다. 양변에 2를 곱하면 $x\ge\frac{14}{3}$가 된다.

(f) 첫 단계는 양변에 제곱근을 취하여 제곱을 제거한다. $\sqrt{(x+1)^2}\ge\sqrt{9}$. $\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $|x+1|\ge 3$이다. $(x+1)$의 절댓값이 3보다 커지는 방법은 두 가지이다. $x+1\ge 3$이거나 혹은 $x+1\le -3$이다. 이 부등식들의 양변에 1을 빼면 $x\ge 2$ 혹은 $x\le -4$를 얻는다. 이 부등식의

해는 이 두 구간의 합이다.

1장 연습문제 정답

1.1 $x = \pm 4$

1.2 $x = A\cos(\omega t + \phi)$

1.3 $x = \dfrac{ab}{a+b}$

1.4 (a)2.2795 (b)1024 (c)-8.373 (d)11

1.5 (a)$\dfrac{3}{4}$ (b)$-\dfrac{141}{35}$ (c)$3\dfrac{23}{32}$

1.6 (a)c (b)1 (c)$\dfrac{9|a|}{|b|}$ (d)a (e)$\dfrac{b}{ac}$ f)$x^2 + ab$

1.7 (a)$x^2 + (a-b)x - ab$ (b)$2x^2 - 7x - 15$ (c)$10x^2 + 31x - 14$

1.8 (a)$(x-4)(x+2)$ (b)$3x(x-3)(x+3)$ (c)$(x+3)(6x-7)$

1.9 (a)$(x-2)^2 + 3$ (b)$2(x+3)^2 + 4$ (c)$6\left(x + \dfrac{11}{12}\right)^2 - \dfrac{625}{24}$

1.10 $\$0.05$

1.11 사람 그림 13종, 동물 그림 30종

1.12 5년 뒤

1.13 소녀는 80개, 소년은 40개

1.14 앨리스의 나이는 15살

1.15 18일

1.16 2시간

1.18 $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

1.19 $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$

1.20 (a) $x = \sqrt[3]{2}$ (b)$x = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, 이때 $n \in \mathbb{Z}$

1.21 $0 < m < 8$일 때 실수해가 없다.

1.22 (a) e^z (b) $\dfrac{x^3 y^{15}}{z^3}$ (c) $\dfrac{1}{4x^4}$ (d) $\dfrac{1}{4}$ (e) -3 (f) $\ln(x+1)$

1.23 $\epsilon = 1.110 \times 10^{-16}$. 십진수의 정밀도는 $n = 15.95$이다.

1.24 (a)$x \in (4, \infty)$ (b)$x \in [3, 6]$ (c)$x \in (-\infty, -1] \cup [\dfrac{1}{2}, \infty)$

1.25 $n > 250$인 경우, 알고리즘 Q가 더 빠르다.

1.26 10cm

1.27 22.52in

1.28 $h = \sqrt{3.33^2 - 1.44^2} = 3m$

1.29 높이는 길이 1이다.

1.30 $x=\sqrt{3}, y=1, z=2$

1.31 $d=\dfrac{1800\tan 20^\circ-800\tan 25^\circ}{\tan 25^\circ-\tan 20^\circ}$, $h=1658.46m$

1.32 $x=\dfrac{2000}{\tan 24^\circ}$

1.33 $x=\tan\theta\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

1.34 $a=\sqrt{3}$, $A_\triangle=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

1.35 $\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{1-\cos 4\theta}{8}$

1.36 $P_\bigcirc=16\tan(22.5^\circ), A_\bigcirc=8\tan(22.5^\circ)$

1.37 $c=\dfrac{a\sin 75^\circ}{\sin 41^\circ}\approx 14.7$

1.38 (a)$h=a\sin\theta$ (b)$A=\dfrac{1}{2}ba\sin\theta$ (c)$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\theta)}$

1.39 $B=44.8^\circ, C=110.2^\circ$. $c=\dfrac{a\sin 110.2^\circ}{\sin 25^\circ}\approx 39.97$

1.40 $v=742.92\,km/h$

1.41 $1.06cm$

1.42 $x=9.55$

1.43 $\dfrac{1}{2}(\pi 4^2-\pi 2^2)=18.85cm^2$

1.44 $\ell_{rope}=8.42m$

1.45 $A_{rect}=5c+10$

1.46 $V_{box}=1.639L$

1.47 $\theta=140^\circ$

1.48 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{1-\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ}=2.8637$

1.49 $7cm$

1.50 $V=3000000L$

1.51 $315\,000L$

1.52 $4000L$

1.53 $d=\dfrac{1}{2}(35-5\sqrt{21})$

1.54 끈의 길이는 $\sqrt{2}\ell$

1.55 물 $20L$

1.56 $h=7.84$ 인치

1.57 $1+2+\cdots+100=50\times 101=5050$

1.58 $x=-2$, $y=2$

1.59 $x=1, y=2, z=3$

1.60 \$112

1.61 20%

1.62 $\$16501.93$

1.64 $0.14s$

1.65 $\tau = 34.625\text{min}, 159.45\text{min}$

1.66 $V(0.01) = 15.58volts$. $V(0.1) = 1.642volts$

1.70 $A_1(x) = 3x$, $A_2 = \frac{1}{2}x^2$

선별된 1장 연습문제 풀이

1.5 (c) $1\frac{3}{4} + 1\frac{31}{32} = \frac{7}{4} + \frac{63}{32} = \frac{56}{32} + \frac{63}{32} = \frac{119}{32} = 3\frac{23}{32}$

1.9 (a)와 (b)의 해는 매우 간단하다. (c)를 풀기 위해 우리는 먼저 2항을 6으로 인수 분해 하면 $6\left(x^2 + \frac{11}{6}x\right) - 21$을 얻는다. 다음으로 선형 항의 계수의 절반을 제곱하고 동치를 유지하기 위해 적절히 보정하면 $6\left[x^2 + \frac{11}{6}x\right] - 21 = 6\left[\left(x + \frac{11}{12}\right)^2 - \left(\frac{11}{12}\right)^2\right] - 21$이 된다. 대괄호를 전개하고 단순화하면 최종적으로 $6\left(x + \frac{11}{12}\right)^2 - \frac{625}{24}$을 얻는다.

1.11 p를 사람 그림 수라고 하고 a를 동물 그림 수라고 놓자. $p + a = 43$이고 $a = p + 17$이 다. 두 번째 식을 첫 번째 식에 대입하면 $p + (p + 17) = 43$이 되고, 따라서 $2p = 26$, $p = 13$이 다. 사람 그림 수가 13이고, 동물 그림 수가 30이다.

1.12 $35 + x = 4(5 + x)$을 x에 대해 풀어야 한다. $35 + x = 20 + 4x$이므로 $15 = 3x$이고, 따라서 $x = 5$가 된다.

1.14 A를 앨리스의 나이, B를 밥의 나이로 놓는다. $A = B + 5$이고 $A + B = 25$이다. 첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하면 $(B + 5) + B = 25$이 되고 $2B = 20$이므로, 밥은 10살이고 앨리스는 15살이다.

1.15 첫 인쇄소는 하루에 $4500/30 = 150$권의 책을 제본할 수 있고, 두 번째 인쇄소는 하루에 $4500/45 = 100$권의 책을 제본할 수 있다. 두 인쇄소는 하루에 총 $150 + 100 = 250$권을 작업할 수 있다. 두 인쇄소가 병행하여 작업을 한다면 모든 책을 제본하는 데 4500/250=18일이 걸릴 것이다.

1.16 t_m은 두 비행기가 만나는 시간을 나타내며, 두 번째 비행기가 출발하는 순간부터 측정된다. 1시간 더 일찍 출발한 첫 번째 비행기는 두 번째 비행기와 만날 때까지 이동한 거리가 $600(t_m + 1)km$일 것이다. 두 번째 비행기는 첫 번째 비행기와 만날 때까지 $900t_m km$의 거리를 이동할 것이다. 두 표현식을 결합하여 $600(t_m + 1) = 900t_m$을 얻게 되고, 비행기가 만나는 시간은 두 번째 비행기가 출발한 후 2시간인 $t_m = 2h$이 된다.

1.17 이것은 학교 시험에 출제되었던 난센스 문제이다. 그냥 여러분이 여전히 문제를 풀고 있는지 확인한 것뿐이다.

1.21 2차 방정식의 근의 공식을 이용하여 $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m}}{4}$을 얻는다. $m^2 - 8m \geq 0$이면

해는 실수이다. $m^2-8m<0$이면 해는 복소수가 될 것이다. 식을 인수 분해 하고 일부 숫자를 대입해보면, 모든 $m\in(0,8)$에 대해 $m^2-8m=m(m-8)<0$이 되는 것을 알 수 있다.

1.23 bit.ly/float64prec에서 계산해보라.

1.24 (c) 좌변에 완전제곱을 완성하면 $2x^2+x=2(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}$이 된다. 부등식 $2x^2+x\geq 1$은 $2(x+\frac{1}{4})^2\geq 1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$로 다시 쓸 수 있다. 양변을 2로 나누면 $(x+\frac{1}{2})^2\geq\frac{9}{16}$. 제곱근을 취하면 $\left|x+\frac{1}{4}\right|\geq\frac{3}{4}$이 되고, 이것은 $x\geq\frac{1}{2}$ 혹은 $x\leq -1$이면 만족된다. 해의 두 부분을 결합하기 위해 합 연산을 사용하라.

1.25 알고리즘 Q의 실행 시간은 문제의 크기에 따라 선형적으로 증가하지만, 알고리즘의 실행 시간은 2차적으로 증가한다. 알고리즘이 같은 시간에 일어날 때 문제의 크기를 알아내기 위해 $P(n)=Q(n)$ 즉 $0.002n^2=0.5n$을 푼다. 해는 $n=250$이다. $n>250$의 경우, 선형 시간 알고리즘(알고리즘 Q)은 시간이 덜 걸린다.

1.29 $c=\phi$, $a=\sqrt{\phi}$와 함께, 피타고라스 공식 $c^2=a^2+b^2$을 b에 대해 푼다. 변 길이 1, $\sqrt{\phi}$, ϕ인 삼각형은 케플러 삼각형이라 불린다.

1.30 x를 구하기 위해 피타고라스 정리를 사용하라. z를 구하기 위해 $\cos(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{z}$을 사용하라. y를 구하기 위해 $\sin(30^\circ)=\frac{1}{2}=\frac{y}{z}$를 사용하라.

1.31 [그림 1-65]에 있는 두 직각삼각형을 보라. 각도 25°를 가진 삼각형으로부터 우리는 $\tan 25^\circ=\frac{h}{800+d}$를 안다. 각도 20°를 가진 삼각형으로부터는 $\tan 20^\circ=\frac{h}{1800+d}$임을 안다. 두 방정식에서 h를 분리하고 소거하면 $(1800+d)\tan 25^\circ=\tan 20^\circ(800+d)$을 얻는다. d에 대해 풀면 $d=\frac{1800\tan 20^\circ-800\tan 25^\circ}{\tan 25^\circ-\tan 20^\circ}=2756.57\text{m}$를 얻는다. 최종적으로 다시 $\tan 25^\circ=\frac{h}{800+d}$을 사용하면 $h=\tan 25^\circ(800+d)=1658.46\text{m}$를 얻는다.

1.32 밑 x이고 높이 2000인 직각삼각형을 고려하라. 다이어그램을 보면 $\theta=24^\circ$이다. $\tan 24^\circ=\frac{2000}{x}$인 관계를 사용하면 x를 구할 수 있다.

1.34 정삼각형의 내각은 모두 60°이다. 원의 중심과 삼각형의 각 꼭짓점을 연결하는 세 개의 방사형 선을 그린다. 정삼각형은 각 30°, 30°, 120°을 가진 3개의 둔각삼각형으로 나뉜다. 이 둔각삼각형의 각각을 중앙 아래로 분할하여, 빗변이 1인 6개의 직각 삼각형을 얻는다. 이등변 삼각형의 변은 직각 삼각형의 밑변의 2배이고, $a=2\cos(30^\circ)=\sqrt{3}$이다. 넓이를 구하기 위해 $A_\triangle=\frac{1}{2}ah$를 사용하고, 여기서 $h=1+\sin(30^\circ)$이다.

1.35 $\sin^2(\theta)=\frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$과 $\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$을 알고 있으므로, 이 둘의 곱은 $\frac{1}{4}(1-\cos(2\theta)\cos(2\theta))$이다. $\cos(2\theta)\cos(2\theta)=\cos^2(2\theta)$임을 주목하라. $\cos^2(2\theta)$에 대한 삼각함수 공식을 사용하면, 마지막 답 $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}(1+\cos(4\theta)))$을 얻는다.

1.36 팔각형을 8개의 이등변삼각형으로 나눈다. 각 삼각형의 높이는 1이 되고 중앙의 각도 측정값은 $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$가 된다. 이 삼각형 각각을 가운데 절반 아래로 두 개로 나눈다. 팔각형은 이제 각도가 22.5°인 16개의 유사한 직각삼각형으로 중앙으로 분할된다. 각도 22.5°와 밑변 1인 직각삼각형의 경우 높이의 길이는 얼마일까? 16개의 삼각형 각각의 높이는 $\frac{b}{2} = \tan(22.5^\circ)$이므로, 팔각형의 둘레는 $P_{\text{팔각형}} = 16\tan(22.5^\circ)$이다. 일반적으로 정$n$각형 내부에 단위원이 새겨지면, 정다각형의 둘레는 $P_n = 2n\tan(\frac{360^\circ}{2n})$이 된다. 팔각형의 면적을 구하기 위해, 공식 $A_\triangle = \frac{1}{2}bh$, $b = 2\tan(22.5^\circ)$ 및 $h = 1$을 사용하여, 각 이등변 삼각형의 면적을 구한다. 팔각형의 면적은 $A_{\text{팔각형}} = 8 \cdot \frac{1}{2}(2\tan(22.5^\circ))(1) = 8\tan(22.5^\circ)$이다. 정$n$각형의 경우, 넓이 공식은 $A_n = n\tan(\frac{360^\circ}{2n})$이다. n이 무한대로 갈 때 P_n과 A_n의 수식이 어떻게 될지 답하면 추가 점수가 주어질지도 모른다(bit.ly/1jGU1Kz 참조).

1.40 처음에는 관찰자와 평면 사이의 수평 거리는 $d_1 = \frac{2000}{\tan 30^\circ}$이다. 10초 후, 거리는 $d_2 = \frac{2000}{\tan 55^\circ}$이다. 속도는 거리의 변화를 시간으로 나눈 것으로 $v = \frac{d_1 - d_2}{10} = 206.36\,\mathrm{m/s}$이다. $\mathrm{m/s}$를 $\mathrm{km/h}$로 변환하려면 적절한 변환 계수를 곱해야만 한다.

$206.36\,\mathrm{m/s} \times \frac{1\mathrm{km}}{1000\mathrm{m}} \times \frac{3600\mathrm{s}}{1\mathrm{h}} = 742.92\,\mathrm{km/h}$

1.41 물의 양은 일정하게 유지되며 $1000\mathrm{cm}^3$이다. 초기에 물의 높이 h_1은 실린더 부피에 대한 공식으로부터 얻을 수 있다. $1000cm^3 = h_1\pi(8.5cm)^2$이므로 $h_1 = 4.41\mathrm{cm}$이다. 병을 가라앉힌 후, 물은 작은 원기둥 부분이 빠진 큰 원기둥 모양을 띤다.
$1000cm^3 = h_2(\pi(8.5cm)^2 - \pi(3.75cm)^2)$. 따라서 $h_2 = 5.47\mathrm{cm}$이다. 물 높이의 변화는 $h_2 - h_1 = 5.47 - 4.41 = 1.06\mathrm{cm}$이다.

1.42 각도 α_1과 α_2에 대한 코사인 법칙을 사용하면, 방정식 $7^2 = 8^2 + 12^2 - 2(8)(12)\cos\alpha_1$과 $11^2 = 4^2 + 12^2 - 2(4)(12)\cos\alpha_2$을 얻는다. 이로부터 $\alpha_1 = 34.09^\circ$과 $\alpha_2 = 66.03^\circ$를 구할 수 있다. 마지막 단계에서 다시 코사인 법칙을 사용하면 $x^2 = 8^2 + 4^2 - 2(8)(4)\cos(34.09^\circ + 66.03^\circ)$을 얻는다.

1.44 끈의 수평 길이는 $\ell_h = 4\sin 40$이다. 도르래를 감싸는 끈의 원형 부분은 반지름이 $r = 50\mathrm{cm} = 0.5\mathrm{m}$이고 원둘레의 $\frac{1}{4}$이다. 공식 $C = 2\pi r$을 사용하면, $\ell_c = \frac{1}{4}(2\pi(0.5)) = \frac{\pi}{4}$를 얻을 수 있다. 끈의 수직 부분은 길이 $\ell_v = 4\cos 40 + 2$이다. 끈의 전체 길이는 $\ell_h + \ell_c + \ell_v = 8.42\mathrm{m}$이다.

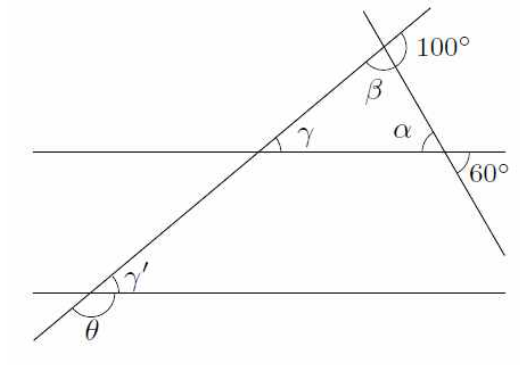
1.45 사각형의 넓이는 밑변과 높이를 곱한 것과 같아서 $A_{rect} = \ell h$이다.

1.46 상자의 부피는 $V = w \times h \times \ell = 10.5 \times 7 \times 22.3 = 1639\mathrm{cm}^3 = 1.639\mathrm{L}$이다.

1.47 우리는 이 개념을 책에서 다루지는 않았지만, 주제에 대한 어휘를 정의해 보자. 예각의 **여각**^complement^은 직각에서의 결손이다. 즉, 각도가 직각에서 부족한 각도이다. (i) 두 개의 각도는

합이 90°일 때 여각 관계이다. 각도의 **보각**은 2개의 직각, 즉 180°에서의 결손이다. (ii) 두 개의 각도가 그 합이 180°일 때 보각 관계이다. 동일한 각도에 대한 보각 관계이거나 혹은 여각 관계에 있는 각들은 서로 같은 각이다.

이제 우리는 이런 사실과 아래의 그림을 사용하여 각도 θ를 찾는다.



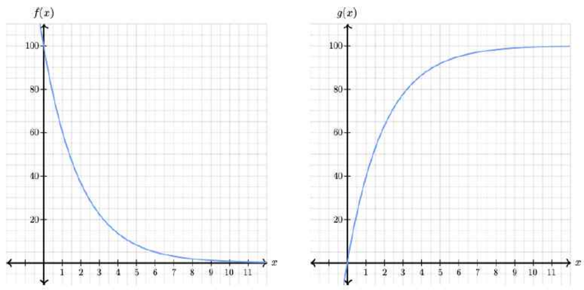
각 α는 각 60°의 맞꼭지각이므로 $\alpha = 60^\circ$이다. 각 β는 각 100°의 보각이므로 $\beta = 180 - 100 = 80^\circ$이다. 삼각형의 세 각의 합은 180°이므로 $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 40^\circ$이다. 두 수평선은 평행이므로, 대각선으로 비스듬히 자르는 선은 두 평행선과 같은 각을 형성하여 $\gamma' = \gamma = 40^\circ$이다. 각도 θ는 γ'의 보각이어서 $\theta = 180 - 40 = 140^\circ$이다.
1.48 이 삼각형의 밑의 길이가 $2r$이고 각 변은 길이가 $R+r$이다. 만약 이 삼각형을 중앙에서 쪼개면, 각 절반은 빗변 $R+r$, 높이 r, 중심 각도가 $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$인 직각삼각형이다. 따라서 $\sin 15^\circ = \frac{r}{R+r}$을 얻는다. 이 방정식을 다시 정리하면 $\frac{R}{r} = \frac{1-\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ} = 2.8637$을 찾는다.
1.51 탱크 총 용량은 $15\times 6\times 5 = 450\mathrm{m}^3$이다. 만약 용량의 30%를 소비했다면, 용량의 70%인 $315\mathrm{m}^3$는 남아 있다. $1\mathrm{m}^3 = 1000\mathrm{L}$이므로, 탱크 안에는 $315000\mathrm{L}$가 있다.
1.52 첫 탱크는 $\frac{1}{4}\times 4000 = 1000\mathrm{L}$를 포함한다. 두 번째 탱크는 3배 더 많은 물을 포함하므로 $3000\mathrm{L}$이다. 따라서 총 $4000\mathrm{L}$이다.
1.53 구멍의 폭은 w, 높이는 h라 하자. d는 구멍 사각형의 변과 뚜껑 직사각형의 변 사이의 거리라 하자. 문제의 진술은 다음 3개 방정식을 만족시켜야 한다.
$$w + 2d = 40,\ h + 2d = 30,\ wh = 500$$
이 방정식을 풀면 $w = 5(1+\sqrt{21})$, $h = 5(\sqrt{21}-1)$, $d = \frac{1}{2}(35 - 5\sqrt{21})$을 얻는다.
1.54 나무 한 단의 양은 원의 넓이 $A = \pi r^2$에 비례한다. 원의 둘레는 끈의 길이와 같으므로 $C = \ell$이다. 원둘레는 반지름에 비례한 $C = 2\pi r$이다. 만약 넓이를 두 배로 한다면, 원의 반지름은 $\sqrt{2}\,r$이 되어야 하고, 이는 원둘레가 $\sqrt{2}$배 되는 것을 의미한다. 만약 나무 두 단을 원한다면, 끈의 길이는 $\sqrt{2}\,\ell$이 필요하다.
1.55 60% 산성 용액 $10\mathrm{L}$안에 $6\mathrm{L}$의 산과 $4\mathrm{L}$의 물이 있다. 20% 산성 용액은 산보다 4배 많은 물을 포함한다. 따라서 산이 $6\mathrm{L}$ 있으면 물은 $24\mathrm{L}$ 필요할 것이다. 이미 $4\mathrm{L}$의 물을 함유한 $10\mathrm{L}$ 산성 용액에서 출발하기 때문에 물 $20L$를 추가해야 한다.
1.56 문제에서 $768/1004$의 비율을 가져야 한다고 했으므로, 높이는 $6\times\frac{1004}{768} = 7.84375$인치가

되어야 한다.

1.57 만약 수를 짝지어 $1+2+3+\cdots+98+99+100$을 다시 쓴다면, $(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots$ 을 얻는다. 이 목록은 50개의 항을 가지며, 각 항은 합이 101이다. 따라서 $1+2+3+\cdots+100=50\times 101=5050$이다.

1.62 12%의 명목 연 백분율 비율의 월이율은 $\dfrac{12\%}{12}=1\%$이다. 10년이 지난 뒤에는 $\$5000(1.01)^{120}=\$16501.93$을 빚지게 된다.

1.63 [그림 A-1]에 함수의 그래프가 있다. $f(x)$는 $x=2$일 때 초기치의 37%로 감소한다. 상승하는 지수 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최댓값의 63%에 도달한다.



(a) The graph of $f(x)$. (b) The graph of $g(x)$.

[그림 A-1] 1.63에서 두 함수의 그래프

1.64 $Q(t)/Q_0=\dfrac{1}{2}$이 되는 즉 $e^{-5t}=0.5$가 되는 시간 t를 구하고자 한다. 양변에 로그를 취하면 $-5t=\ln(0.5)$을 얻고, t에 대해 풀면 $t=0.14s$을 얻을 수 있다.

1.65 $T(24)/T_0=\dfrac{1}{2}=e^{-24/\tau}$이라고 했고, 이는 $\ln(\dfrac{1}{2})=-24/\tau$으로 다시 쓸 수 있다. τ에 대해 풀면 $\tau=\dfrac{24}{\ln 2}=34.625\text{min}$을 얻는다. 물체가 초기 온도의 1%에 도달하는데 걸리는 시간을 구하기 위해, 우리는 $T(t)/T_0=0.01=e^{-t/34.625}$을 t에 대해 풀면, $t=159.45\text{min}$을 얻는다.

1.67 사기꾼이 아닌 적어도 한 명의 은행가가 있다. 다르게 표현하면 ‘모든 은행가가 도둑인 것은 아니다’. 대부분은 그렇다.

1.68 대기업을 경영하는 사람들은 모두 영원히 지옥불에 타야한다.

1.69 (a) 돈이 있지만 연락이 되지 않는 투자자. (b) 연락은 되지만 돈이 없는 투자자. (c) 돈도 가지고 있고 연락도 되는 투자자