5장 정답 및 풀이

문제 정답

문제 5-1 (a) 0 (b) 2 (c) ∞
각 극한 식은 입력 변수의 큰 값을 가질 때 두 함수의 비율이 어떻게 되는지를 묘사한다.

문제 5-2 (a) 2 (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) 0 (f) 0

문제 5-3 $x=\frac{1}{3}$에서 최대, $f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$

문제 5-4 (a) $\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+4}$, $\int(a)dx=2\ln(x-3)+\ln(x+4)$

(b) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}$, $\int(b)dx=\ln(x-1)+2\ln(x-2)$

(c) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}$, $\int(c)dx=\frac{1}{4}\ln(x-1)-\frac{1}{4}ln(x+1)-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$

문제 5-5 $\frac{\pi R^2 h}{3}$

문제 5-6 $\frac{\pi R^2 h}{3}$

문제 5-7 $(a)\,caN+cb\frac{N(N+1)}{2}$ $(b)\,ca^2N+cabN(N+1)+cb^2\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ $(c)\,\pi^2$

5장 연습문제 정답

5.1 (a) -6 (b) 2 (c) 존재하지 않는다. (d) 8.6(아주 자세히 살펴보라) (e) -5
(f) 존재하지 않는다. (g) -2 (h) -2 (i) -2 (j) 연속이 아니다.
(k) $[-10,-5),[-5,2),[2,5),(5,10]$

5.2 (a) 4 (b) 6 (c) 5

5.4 (a) 존재하지 않는다. (b) 0 (c) 존재하지 않는다. (d) 0 (e) 존재하지 않는다.
(f) 0 (g) 1 (h) 0 (i) 1

5.5 (a) 존재하지 않는다. (b) 3 (c) $2a$

5.7 (a) $\frac{dy}{dx}=13x^{12}$ (b) $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$ (c) $\frac{dy}{dx}=2ax^{(2a-1)}$ (d) $\frac{du}{dx}=2.4x^{1.4}$

(e) $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ (f) $\frac{dy}{dx}=-\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}$ (g) $\frac{du}{dx}=-\frac{8}{5}x^{-\frac{13}{5}}$ (h) $\frac{dy}{dx}=2ax^{a-1}$

(i) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{q}x^{\frac{3-q}{q}}$

5.8 (a) $\frac{dy}{dx} = 3ax^2$ (b) $\frac{dy}{dx} = 13 \times \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ (c) $\frac{dy}{dx} = 6x^{-\frac{1}{2}}$ (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

(e) $\frac{du}{dz} = \frac{an}{c}z^{n-1}$ (f) $\frac{dy}{dt} = 2.36t$

5.9 (a) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$ (b) $2ax + b$ (c) $3x^2 + 6ax + 3a^2$

5.10 (a) $\frac{dw}{dt} = a - bt$ (b) $\frac{dy}{dx} = 2x$ (c) $14110x^4 - 65404x^3 - 2244x^2 + 8192x + 1379$

(d) $\frac{dx}{dy} = 2y + 8$ (e) $185.9022654x^2 + 154.36334$

5.11 (a) $p'(x) = \frac{-5}{(3x+2)^2}$ (b) $q'(x) = \frac{6x^4 + 6x^3 + 9x^2}{(1+x+2x^2)^2}$ (c) $r'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$

(d) $s'(x) = \frac{anx^{-n-1} + bnx^{n-1} + 2nx^{-1}}{(x^{-n} + b)^2}$

5.12 (a) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (c) $-\frac{1}{2\sqrt{(a+x)^3}}$ (d) $\frac{ax}{\sqrt{(a-x^2)^3}}$ (e) $\frac{2a^2 - x^2}{x^3\sqrt{x^2 - a^2}}$

(f) $\frac{\frac{3}{2}x^2\left[\frac{8}{9}x(x^3+a) - (x^4+a)\right]}{(x^4+a)^{\frac{2}{3}}(x^3+a)^{\frac{3}{2}}}$ (g) $\frac{2a(x-a)}{(x+a)^3}$ (h) $-\frac{m}{n}x^{-\frac{m+n}{n}}$ (i) $\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

5.13 (a) $\frac{dw}{dx} = \frac{3x^2(3+3x^3)}{27(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^6)^3}$ (b) $\frac{dv}{dx} = -\frac{12x}{\sqrt{1+\sqrt{2}+3x^2}\,(\sqrt{3}+4+\sqrt{1+\sqrt{2}+3x^2})^2}$

(c) $\frac{du}{dx} = -\frac{x^2(\sqrt{3}+x^3)}{\sqrt{\left[1+(1+\frac{x^3}{\sqrt{3}})^2\right]^3}}$

5.14 $f'(x) = ab(e^{ax} + e^{-ax})$

5.15 $u'(t) = 2at + \frac{2}{t}$

5.16 $\ln n$

5.17 $f'(x) = a^{bx}$

5.18 (a) $\frac{n}{x}$ (b) $\frac{3e^{-\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2}$ (c) $6xe^{-5x} - 5(3x^2+1)e^{-5x}$ (d) $6x(\sqrt{x}+1) + \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$

(e) $\frac{ax^{a-1}}{x^a + a}$ (f) $\frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$ (g) $a^x(ax^{a-1} + x^a \ln a)$ (h) $\frac{1+x}{x}$ (i) $\frac{3}{x}(\ln ax)^2$

5.19 (a) $x^x(1 + \ln x)$ (b) $2x(e^x)^x$ (c) $e^{x^x}x^x(1 + \ln x)$

5.20 (a) $A\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ (b) $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ (c) $5\cos 5\theta$ (d) $3\sin^2\theta\cos\theta$

(e) $-18\sin(\theta + 6)$ (f) $\frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

5.21 $\frac{dy}{dt} = -n\sin(2\pi nt)$

5.22 (a) $a^x \ln a \cos a^x$ (b) $\frac{dy}{dx} = \tan x \sec x$ (c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3\sec x}\,(3\sec^2 x - 1)}{2}$

5.23 (a) $2\sin\theta(3\cos^2\theta - 1)$ (b) $amn\theta^{n-1} \times \tan^{m-1}(\theta^n)\sec^2\theta^n$ (c) $e^x(\sin^2 x + \sin 2x)$

(d) $4.6(2\theta+3)^{1.3}\cos((2\theta+3)^{2.3})$ (e) $3\theta^2 + 3\cos(\theta+3) - \ln(3)(3^{\sin\theta}\cos\theta + 3^\theta)$

5.24 $\frac{dl}{dt} = 0.000012\ell_0\,[m/℃]$

5.25 (a) $\frac{dP}{dV} = abV^{b-1}[W/V]$,

(b) $\frac{dP}{dV}(100) = 1.65[W/V]$, $\frac{dP}{dV}(110) = 1.82[W/V]$, $\frac{dP}{dV}(120) = 1.98[W/V]$

5.26 $\frac{df}{dD} = -\frac{1}{LD^2}\sqrt{\frac{gT}{\pi\sigma}}$, $\frac{df}{dL} = -\frac{1}{DL^2}\sqrt{\frac{gT}{\pi\sigma}}$ $\frac{df}{d\sigma} = -\frac{1}{2DL}\sqrt{\frac{gT}{\pi\sigma^3}}$, $\frac{df}{dT} = \frac{1}{2DL}\sqrt{\frac{g}{\pi\sigma T}}$

5.27 (a) $\frac{dC}{dr} = 2\pi$ (b) $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$ (c) $\frac{dA}{dr} = 8\pi r$ (d) $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

5.28 $\frac{dI}{dT} = b + 2cT$

5.29 $R_1'(t) = R_0(a+2bt)$, $R_2'(t) = R_0(a + \frac{b}{2\sqrt{t}})$, $R_3'(t) = -\frac{R_0(a+2bt)}{(1+at+bt^2)^2}$

5.30 $V'(t) = 1.4340(0.000014t - 0.001024)$, $V'(15) = -0.00117$, $V'(20) = -0.00107$, $V'(25) = -0.00097$.

5.31 (a) $\frac{dV}{d\ell} = b + \frac{k}{I}$ (b) $\frac{dE}{dI} = -\frac{c+k\ell}{I^2}$

5.32 (a) $17 + 24x$, 24 (b) $2bx + 4cx^3$, $2b + 12cx^2$ (c) $\frac{x^2+2ax-a}{(x+a)^2}$, $\frac{2a(a+1)}{(x+a)^3}$

5.33 (a) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 6a$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$

5.34 (a) $-b$, 0 (b) $2, 0$ (c) $56440x^3 - 196212x^2 - 4488x + 8192$, $169320x^2 - 392424x - 4488$

(d) 2, 0 (e) $371.80453x$, 371.80453

5.35 $v(2) = 64[ft/s]$, $v(4.6) = 147.2[ft/s]$, $v(0.01) = 0.32[ft/s]$

5.36 $\dot{x} = v_i - gt$, $\ddot{x} = -g$

5.37 $v(4) = 45.1[m/s]$, $a(4) = 12.4[m/s^2]$

5.38 $\omega(1.5) = 11.2[rad/s]$, $\alpha = 9.6[rad/s^2]$.

5.39 $v(t) = 20.4t^2 - 10.8[in/s]$, $a(t) = 40.8t[in/s^2]$, $v(3) = 172.8[in/s]$, $a(3) = 122.4[in/s^2]$.

5.40 $v(t) = \frac{1}{30\sqrt[3]{(t-125)^2}}[km/s]$, $a(t) = -\frac{1}{45\sqrt[3]{(t-125)^5}}[km/s^2]$

5.41 $v(t) = 0.8 - \frac{8t}{(4+t^2)^2}$, $a(t) = \frac{24t^2 - 32}{(4+t^2)^3}$, $v(10) = 0.7926[m/s]$, $a(10) = 0.00211[m/s^2]$

5.42 $n=2, n=11$

5.44 $f'(2)=1.44$

5.45 $x=\frac{1}{2}(a+b)$

5.46 $\frac{dy}{dx}(x)=3x^2+3, \frac{dy}{dx}(0)=3, \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)=3\frac{3}{4}, \frac{dy}{dx}(1)=6, \frac{dy}{dx}(2)=15$

5.48 (a) $\frac{dy}{dx}=\frac{ab}{(x+b)^2}$ (b) $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{b}e^{-\frac{x}{b}}$ (c) $\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{\pi}\frac{b}{b^2+x^2}$

5.51 $x=\pm\sqrt{2}$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

5.52 $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{9}\frac{x}{y}$, $\frac{dy}{dx}=0$ ($x=0$일 때), $\frac{dy}{dx}=\frac{\pm 1}{3\sqrt{2}}$ ($x=1$일 때)

5.53 $\frac{dz}{dx}=x^2-6x^2y-2y^2, \frac{dz}{dy}=-2x^3-4xy+\frac{1}{3}$

5.54 $2xyz+y^2z+z^2y+2xy^2z^2$, $2xyz+x^2z+xz^2+2x^2yz^2$, $2xyz+x^2y+xy^2+2x^2y^2z$.

5.55 $\frac{1}{r}\{(x-a)+(y-b)+(z-c)\}=\frac{(x+y+z)-(a+b+c)}{r}$, $\frac{3}{r}$

5.56 $dy=vu^{v-1}du+u^v\ln(u)dv$

5.57 (a) $dy=3u^2\sin v du+u^3\cos v dv$ (b) $dy=u(\sin x)^{u-1}\cos x dx+(\sin x)^u\ln(\sin x)du$

(c) $dy=\frac{1}{v}\frac{1}{u}du-\ln u\frac{1}{v^2}dv$

5.58 $m=4, b=-3$

5.59 $\angle\ell_1=45^\circ, \angle\ell_2=71.56^\circ$, 선 ℓ_1과 선 ℓ_2는 각도 26.56°로 교차한다.

5.60 $x=1, x=-3$에서 교차한다. 각은 $153^\circ 26', 2^\circ 28'$.

5.61 $(x,y)=(3.57, 3.50)$에서 각도 $16^\circ 16'$로 교차한다.

5.62 $x=\frac{1}{3}, y=2\frac{1}{3}, b=-\frac{5}{3}$.

5.63 (a) $x=-2, y=-4$에서 최댓값. $x=0, y=0$에서 최솟값

(b) $x=a, y=\frac{1}{2a}$에서 최댓값. $x=-a, y=-\frac{1}{2a}$에서 최솟값.

(c) $x=-1$에서 최댓값. $x=1$에서 최솟값

5.64 최대 : $x=-2.19, f(-2.19)=24.19$, 최소 : $x=1.52, f(1.52)=-1.38$.

5.65 $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}-2cx$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-2c$, $x=\frac{b}{2ac}$에서 최댓값

5.66 (a) 하나의 최대와 두 개의 최소 (b) $x=0$에서 하나의 최대

5.67 (a) 최소 $x=1.71, y=6.14$ (b) 최대 $x=-0.5, y=4$

(c) 최대 $x=1.414, y=1.7675$ 최소 $x=-1.414, y=1.7675$

5.68 0.4N, 0.6N

5.69 $x=\sqrt{\frac{a}{c}}$

5.70 속도: 8.66 해리/시간. 시간: 115.47시간. 최소 비용: $225,000

5.71 (a) $x=7.5$에서 최대와 최소, $f(7.5)=\pm 5.414$

(b) 최소: $x=\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)=0.25$ 최대:$x=-\frac{1}{3}, g\left(-\frac{1}{3}\right)=1.408$

5.72 (a) $x=\frac{1}{e}$에서 최소 (b) $x=e$에서 최대 (c) $x=\ln a$에서 최소

5.73 $\theta=\frac{\pi}{4}(45^{\circ})$

5.74 $\theta=0.86[rad]$에서 최대, $\theta=-0.86[rad]$에서 최소.

5.76 $25\sqrt{3}\,[in^2]$ (이등변 삼각형)

5.77 $\frac{dy}{dx}=-\frac{10}{x^2}+\frac{10}{(8-x)^2}$, $x=4, y=5$에서 최소

5.78 네 변의 중점을 연결하라.

5.79 (a) $r=R\sqrt{\frac{2}{3}}$ ((b) $r=\frac{R}{\sqrt{2}}$ (c) $r=0.8506R$

5.80 겉넓이는 $\frac{8}{r}$ 피트^2/초로 증가한다.

5.81 $y=\frac{1}{\sqrt{e}}$

5.83 (a) $x^4+x^3+x^2+x+C$ (b) $\frac{ax^2}{4}+\frac{bx^3}{9}+\frac{cx^4}{16}+C$

5.84 (a) $\frac{4\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$ (b) $-\frac{1}{x^3}+C$ (c) $\frac{x^4}{4a}+C$ (d) $\frac{1}{3}x^3+ax+C$ (e) $-2x^{-\frac{5}{2}}+C$

(f) $\frac{x^2}{2}-ax+(a^2+a)\ln(x+a)+C$ (g) $\frac{x^4}{4}+3x^3+\frac{27}{2}x^2+27x+C$

(h) $\frac{x^3}{3}+\frac{2-a}{2}x^2-2ax+C$ (i) $a^2\left(2x^{\frac{3}{2}}+\frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)+C$ (j) $-\frac{1}{3}\cos\theta-\frac{1}{6}\theta+C$

(k) $\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(2a\theta)}{4a}+C$ (l) $\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}+C$ (m) $\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2a\theta}{4a}+C$

(n) $\frac{1}{3}e^{3x}+C$ (o) $\ln(1+x)+C$

5.85 (a) $\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$ (b) $\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$ (c) $\frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\ln x-\frac{1}{a+1}\right)+C$

(d) $\sin(e^x)+C$ (e) $\sin(\ln x)+C$ (f) $e^x(x^2-2x+2)+C$ (g) $\frac{1}{a+1}(\ln x)^{a+1}+C$

(h) $\ln(\ln x)+C$ (9) $\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-bx^2}}{x\sqrt{a}}$

5.86 (a) $\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+4}$ (b) $\frac{5}{x-4}-\frac{4}{x-3}$ (c) $\frac{19}{13(2x+3)}-\frac{22}{13(3x-2)}$

(d) $\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x-4}$ (e) $\frac{1}{6(x-1)}+\frac{11}{15(x+2)}+\frac{1}{10(x-3)}$

(f) $\frac{7}{9(3x+1)}+\frac{71}{63(3x-2)}-\frac{5}{7(2x+1)}$ (g) $\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$

(h) $x+\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1-2x}{3(x^2-x+1)}$ (i) $\frac{3}{(x+1)}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

(j) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$.

5.87 (a) $2\ln(x-1)+3\ln(x+2)+C$ (b) $\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{5}\ln(x-2)+\frac{3}{10}\ln(x+3)+C$

(c) $\frac{b}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+c$ (d) $\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}+C$ (e) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\tan^{-1}(x)+C$

5.88 $A(0,6)=60$

5.89 $A(0,a)=\frac{4a^2\sqrt{a}}{3}$

5.90 $A(0,\pi)=2$

5.91 $A(0,\pi)=\frac{\pi}{2}\approx 1.57$

5.92 0.572

5.93 $A(0,1)=1.25$

5.94 $A(1,a)=a\ln a$

5.95 $A(2,8)=62.6$

5.96 (a) $y=\frac{1}{8}x^2+C$ (b) $y=\sin x+C$ (c) $y=x^2+3x+C$

$y(0)=1$을 만족시키기 위해 각 경우에 $C=1$이라 놓아야 한다.

5.97 일반해 $f(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

초기조건 $f(0)=1, f'(0)=1$을 만족시키는 특수해$f(x)=e^{-x}+2xe^{-x}$.

5.98 $\ell=\frac{1}{2}\sinh^{-1}(1)+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

5.99 $V_s=110[V]$

5.100 79.4

5.101 부피 $=4.9348$, 겉넓이 $=12.57$

5.102 436.3

5.103 (a) 2에 수렴 (b) 1에 수렴 (c) 1에 수렴 (d) 수렴하지 않음

5.106 (a) 발산 (b) 수렴 (c) 발산 (d) 수렴 (e) 수렴 (f) 발산 (g) 수렴 (h) 수렴 (i) 수렴

5.107 (a) 수렴 (b) 발산 (c) 수렴

5.108 (a) 수렴 (b) 수렴 (c) 수렴

5.109 (a) 1 (b) 8 (c) 2

5.110 (a) 절대 수렴 (b) 조건 수렴 (c) 조건 수렴

5.111 (a) 수렴 (b) 수렴 (c) 발산

5.112 $\frac{4}{3}$

5.113 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

5.114 (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n)!}$

5.115 (a)$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^5(x-5)^n}{n!}$

(b)$g(x) = \sin(10) + \cos(10)(x-10) - \frac{\sin(10)}{2!}(x-10)^2 - \frac{\cos(10)}{3!}(x-10)^3 + \cdots$

5.116 (a)$\rho = 1$ (b)$\rho = \infty$ (c)$\rho = 1$ (d)$\rho = \infty$ (e)$\rho = 3$ (f) $\rho = \sqrt{3}$

5.117 (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(2))^n}{n!} x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1}$

(d)$1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

5.118 (a) 발산 (b) 수렴 (c) 발산 (d) 발산 (e) 수렴 (f) 수렴 (g) 수렴 (h) 수렴 (i) 수렴 (j) 수렴 (k) 수렴 (l) 발산

5.120 $\int_{\alpha}^{\beta} (mx+b)dx = \frac{m}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha)$

5.121 $\int_{0}^{d} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{1}{3}ad^3 + \frac{1}{2}bd^2 + cd$

5.122 $A_{sphere} = 4\pi R^2$

5.123 $\frac{\pi}{5}$

5.124 $\frac{2\pi}{35}$

5.125 $V = \pi$

5.126 $I_{sph.shell} = \frac{2}{3}mR^2$

5.127 $I_{sphere} = \frac{2}{5}mR^2$

5.128 $I_{sphere} = \frac{2}{5}mR^2$

선별된 5장 연습문제 풀이

5.1 (j) $x=5$에 대해, $\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$이므로 $f(x)$는 $x=5$에서 불연속. 이는 제거된 불연속이라 부른다.

(k) 함수는 불연속 점을 제외하고는 어디에서나 연속이다. 함수 $f(x)$는 $x=-5$와 $x=2$에서 오른쪽으로부터 연속적이므로, 이 끝점은 오른쪽 구간에 포함된다.

5.3 회의론자가 지정한 정밀도 ϵ의 함수로 값 $\delta(x=5$에 얼마나 가깝게 있어야하는지)를 선택할 수 있다. $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{3}$을 선택할 수 있지만, $\frac{\epsilon}{4}$나 $\frac{\epsilon}{5}$도 가능하다. 먼저 다음과 같은 연쇄 부등식을 사용하여 $\lim_{x \to 5^+} 2x = 15$를 증명한다. 가정 $x \in [5, 5+\delta)$에서 시작하여, 다음 식들을 얻을 수 있다.

$$5 \le x < 5+\delta$$
$$0 \le x-5 < 5+\delta-5 = \delta$$
$$0 \le 3x-15 < 3\delta = 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

따라서 모든 가능한 ϵ에 대해 $|3x-15| < \epsilon$임을 보이면 된다. 이는 $\lim_{x\to 5^+} 3x = 15$를 증명하는 것이다. 과정은 좌극한과 유사하다. 가정 $x \in [5, 5+\delta)$에서 시작하여 $\delta = \frac{\epsilon}{3}$를 다시 선택해서, 모든 ϵ에 대해 $|3x-15| < \epsilon$임을 보인다. 양측 모두에서 극한이 존재하고 그 값이 15와 같기 때문에 $\lim_{x\to 5} 3x = 15$임을 증명했다.

5.4 (h) 우리는 압착 원리를 사용하여 $\lim_{x\to 0^+} x\sin(\frac{1}{2}) = 0$을 증명할 수 있다. $-1 \le \sin(\frac{1}{2}) \le 1$이 $-x \le x\sin(\frac{1}{x}) \le x$임을 확인하라. 아래 극한 $\ell(x) = -x$와 위 극한 $u(x) = x$이 $x \to 0^+$일 때 0이 되기 때문에, 그 둘 사이에서 압착이 되는 $x\sin(\frac{1}{x})$의 극한 역시 0이 된다.

5.25 계산을 위해 bit.ly/OiAjIN을 참조하라.

5.49 미분은 $\frac{dy}{d\theta} = 100\cos(\theta - 15^\circ)$이다. $\theta = 15^\circ$일 때 최대 기울기는 $y'(15^\circ) = 100$이 된다. $\theta = 75^\circ$일 때 기울기는 $100\cos(75^\circ - 15^\circ) = 100\cos(60^\circ) = 50$이며, 최댓값의 절반이다.

5.51 먼저 전체 방정식의 x에 대한 미분을 구하라.

$$\frac{d}{dx}[x^2+y^2] = \frac{d}{dx}[4]$$

방정식 $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$을 얻을 수 있고, 이로부터 $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$을 얻는다. 조건 $\frac{-x}{y} = 1$은 직선 $y = -x$와 같고, 점 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$과 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$에서 원 $x^2+y^2 = 4$과 교차한다.

5.52 방정식(타원)의 음함수 미분을 취하면, $\frac{2x}{9} + \frac{2y}{4}\frac{dy}{dx} = 0$을 얻는다. 미분을 분리하면 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{9}\frac{x}{y}$이다. 원의 기울기 방정식과의 유사성에 유의하라. $x = 0$일 때, $\frac{dy}{dx} = 0$이다. 수직선 $x = 1$은 곡선을 두 지점에서 가로지른다. 타원의 아래 반쪽에서 기울기는 양수 $\frac{dy}{dx} = \frac{+1}{3\sqrt{2}}$이고, 위 반쪽에서 기울기는 음수 $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{3\sqrt{2}}$이다.

5.75 직사각형의 넓이는 폭 곱하기 높이이다($A = \omega\ell$). 끈을 전부 사용한다고 가정할 때, 구성된 직사각형은 둘레가 $p = 2\omega + 2\ell$이 된다. (고정된) 둘레와 길이의 함수로 폭을 $\omega = \frac{p}{2} - \ell$로 다시 쓸 수 있다. 최대 넓이를 찾기 위해 함수 $A(\ell) = \omega\ell = (\frac{p}{2} - \ell)\ell$을 최대로 해야 한다. $A'(\ell) = -\ell + (\frac{p}{2} - \ell)$이다. $A'(\ell) = 0$에서 ℓ에 대해 풀면 $\ell = \frac{p}{4}$를 얻는다. 둘레 p를 가지면서 넓이가 최대인 사각형은 변 길이가 $\frac{1}{4}p$인 정사각형이다.

5.82 함수의 적분 함수의 미분이 함수 그 자체라는 미적분학의 근본 정리이다.

5.96 (a) 미분이 $\frac{1}{4}x$인 함수 $y(x)$를 구하고자 한다. 적분하면 $y(x)=\frac{1}{8}x^2$를 얻고, 적분 상수 C를 더할 수 있으므로 일반해는 $y(x)=\frac{1}{8}x^2+C$이다.

(b) 방정식 $\frac{dy}{dx}=\cos x$의 양변에 부정적분을 취하면, $y=\sin x+C$를 얻는다.

(c) $\frac{dy}{dx}=2x+3$를 적분하면 $y=x^2+3x+C$을 얻는다.

5.97 2계 미분 방정식(2계 미분을 포함하는 미분 방정식)의 경우 두 가지 독립 해가 존재한다. 힌트는 이러한 해가 $e^{-\lambda x}$와 $xe^{-\lambda x}$이고, 미분 방정식을 만족하도록 $\lambda=1$을 선택했다는 것을 알려준다. 일반해는 이러한 해의 선형 조합으로 $f(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$이다. 여기서 C_1과 C_2는 임의의 상수이다. $f(0)$와 $f'(0)$를 계산함으로써, $C_1=1$과 $C_2=2$가 초기 조건 $f(0)=1$과 $f'(0)=1$을 만족한다는 것을 알 수 있다. bit.ly/1kNxhvo을 참조하라.

5.98 곡선 $f(x)$의 호 길이는 $\ell=\int_a^b d\ell=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$이다. 이 문제에서 $f'(x)=x$이므로 우리가 찾는 적분은 $I=\int\sqrt{1+x^2}\,dx$이다.

$\sqrt{1+x^2}=\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$임을 주목하라. 첫 항은 $\sinh^{-1}(x)$의 미분이다.

두 번째 항을 위해, $u=x$, $dv=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$로 부분 적분을 사용하라.

방정식 $I=\sinh^{-1}(x)+x\sqrt{1+x^2}-I$을 얻을 것이고, 여기서 I는 우리가 구할 적분이다.

끝점에서 I를 평가하면, $\ell=I|_0^1=\frac{1}{2}sinh^{-1}(1)+\frac{1}{2}\sqrt{2}$을 얻는다.

$\sinh^{-1}(x)\equiv\ln(x+\sqrt{1+x^2})$이기 때문에 답 $\frac{1}{2}ln(1+\sqrt{2})+\frac{1}{2}\sqrt{2}$은 또한 옳다.

5.99 한 주기 T 동안 전압의 제곱을 계산하려 한다 : $V_{avg}^2=\frac{1}{T}\int_0^T 155.57^2\cos^2(\omega t)dt$.

$\tau=\omega t$을 대입하면, 동치인 식 $V_{avg}^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}155.57^2\cos^2(\tau)d\tau$을 얻는다. 이것은

$\frac{155.57^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(\tau)d\tau=\frac{155.57^2}{2\pi}\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(t)\cos(t)}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{155.57^2}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{2}\right]=\frac{155.57^2}{2}$이다.

rms 전압은 $V_{rms}=\sqrt{\frac{155.57^2}{2}}=\frac{155.57}{\sqrt{2}}=100[V]$이다.

5.104 모든 $n\geq 1$에 대하여 $\frac{1}{2^n+n}<\frac{1}{2^n}$임을 관찰하라. $r=\frac{1}{2}$인 $|r|<1$인 기하급수이기 때문에 $\sum_n\frac{1}{2^n}$은 수렴한다는 것을 알고 있다. 직접 비교 평가법에 따라 $\sum_n\frac{1}{2^n+n}$ 또한 수렴한다.

5.105 급수에서 N번째 항의 극한은 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}\neq 0$이다. 급수 $\sum_n\frac{n^2}{2n^2+1}$은 0이 아닌

무한 개수의 항의 극한을 포함한다. 따라서 틀림없이 발산한다.

5.109 각 경우에 기하급수 공식 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$을 사용한다. 계산을 위해 bit.ly/1e9F52v을 참조하라.

5.110 기하급수 공식 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$을 사용하라.

5.112 이것은 $r=\frac{1}{2}$이고 $a=\frac{2}{3}$인 기하급수이다. 따라서 $\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$이다.

5.119 힌트에서 제안된 접근법을 사용하면 합 $\sum_{n=1}^{N} n$을 그룹화하여 쓸 수 있다. 1을 N과, 2를 $N-1$과, 3을 $N-2$와, 이 같은 방식으로 $\frac{N}{2}$개 항을 얻을 때까지 그룹화하면 각각의 값은 $N+1$이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N}{2}(N+1) = \frac{N(N+1)}{2}$을 얻는다.

두 번째에 대해, 우리는 이 급수의 먼 곳까지의 양상을 사용할 수 있다. 이 급수의 첫 항과 마지막 항을 제외하고, $(n+1)^3-n^3$ 각 항의 음수 부분이 다음 항의 양수 부분을 제거시킨다.

따라서 오직 첫 항의 음수 부분과 마지막 항의 양수 부분만 남아 $\sum_{n=1}^{N}(n+1)^3-n^3=(N+1)^3-1$이 된다.

기본 대수 연산을 사용하면 $(n+1)^3-n^3=n^3+3n^2+3n+1-n^3=3n^2+3n+1$을 얻는다.

$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^3-n^3=(N+1)^3-1$임을 알기 때문에, 다음 방정식을 얻을 수 있다.

$$(N+1)^3-1 = \sum_{n=1}^{N} 3n^2+3n+1 = 3\sum_{n=1}^{N} n^2 + 3\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 1$$

공식 $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$과 $\sum_{n=1}^{N} 1 = N$을 사용하면, 방정식을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$(N+1)^3-1 = 3\sum_{n=1}^{N} n^2 + 3\frac{N(N+1)}{2} + N$$

$\sum_{n=1}^{N} n^2$을 분리하여 간단히 하면 원하는 결과를 얻을 수 있다.

5.120 5.13절에서 적분을 리만 합의 극한으로 정의한 것을 사용하면, $x=\alpha$와 $x=\beta$ 사이에서 $f(x)$의 적분에 대한 다음의 공식을 쓸 수 있다.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\triangle x)\triangle x$$

여기에서 $\triangle x = \frac{\beta-\alpha}{n}$는 곡선 아래 넓이를 근사치로 구하기 위해 사용되는 직사각형의 폭을 나타낸다. 함수 $f(x)=mx+b$의 적분에 대해, 공식은 다음과 같이 된다.

$$\int_{\alpha}^{\beta} mx+b\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(m(\alpha+k\triangle x)+b)\triangle x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \triangle x((m\alpha+b)\sum_{k=1}^{n} 1 + m(\triangle x)\sum_{k=1}^{n} k)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \triangle x\left((m\alpha+b)n + m(\triangle x)\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

극한 $n\to\infty$을 취한 후 간단히 하면 최종 답 $\int_{\alpha}^{\beta}(mx+b)dx = b(\beta-\alpha)+\frac{m}{2}(\beta^2-\alpha^2)$을 얻을 수 있다.

5.121 적분을 무한 리만 합으로 정의한 것을 사용하고 $x_k = 0+\triangle xk$과 $\triangle x = \frac{d-0}{n}$을 취하면, $x=0$과 $x=d$ 사이에서 곡선 $f(x)=ax^2+bx+c$ 아래 넓이를 위한 다음 공식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^d ax^2+bx+cdx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a(\triangle x)^2k^2+b(\triangle x)k+c\right)\triangle x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\triangle x\left(a(\triangle x)^2\sum_{k=1}^{n}k^2+b(\triangle x)\sum_{k=1}^{n}k+c\sum_{k=1}^{n}1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\triangle x\left(a(\triangle x)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+b(\triangle x)\frac{n(n+1)}{2}+cn\right)$$

이는 $\triangle x = \frac{d}{n}$를 사용하고 극한을 취하면 $\frac{1}{3}ad^3+\frac{1}{2}bd^2+cd$이 된다.

5.122 반지름이 R인 구의 겉넓이는 반지름이 $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$에 따라 변하는 영역 dA의 좁은 원형 조각으로 분할하여 계산할 수 있다. 각 조각의 폭은 호 길이 수식 $d\ell = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$에 의해 주어진다. $A_{sphere} = \int_{-R}^{R}2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$를 계산하기 위해 먼저 $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$를 찾은 다음 $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$를 얻는다. 공식에 대입하면 $A_{sphere} = \int_{-R}^{R}2\pi\sqrt{R^2-x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$를 찾을 수 있다. 이는 $2\pi R\int_{-R}^{R}1dx$으로 간단히 할 수 있고, 이는 예상하는 대로 $4\pi R^2$을 제공한다.

5.125 원판 방법을 사용하면, $x=1$과 $x=a$ 사이에서 토리첼리의 트럼펫의 부피가 $\int_1^a \pi(f(x))^2dx = \pi\int_1^a\frac{1}{x^2}dx = \pi\left(1-\frac{1}{a}\right)$임을 알 수 있다. 총 부피를 구하기 위해, 극한 $\lim_{a\to\infty}\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)=\pi$를 계산한다.

5.126 $I_{sph.shell} = \int_{-R}^{R}(f(x))^2\sigma 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$을 구하기 위해, 먼저 $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$을 계산하면 $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$을 얻는다. 이 계산을 적분에 대입하면, $I_{sph.shell} = 2\pi\sigma R\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx$을 찾는다. 이는 다항식의 적분이다.

5.127 구형 껍질 방법을 사용하여 구의 부피를 계산하는 공식은 $V_{sphere} = \int_0^R 2\pi rh(r)dr$이다. 여기서 $h(r)=2\sqrt{R^2-r^2}$이며, 이것은 반지름 r에서의 얇은 원통형 껍질의 높이이고, $2\pi r$은 원

둘레이다. 적분 $I_{sphere} = \int r^2 dm$을 평가하기 위해, $dm = \rho A(r)dr = \rho 2\pi r h(r)dr$을 정의하고 각각의 dm에 추가 인자인 r^2을 곱해 스케일을 바꾼다. 따라서 $I_{sphere} = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r 2\sqrt{R^2 - r^2}\,dr$을 얻는다. 적분 $\int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\,dr$을 계산하는 것은 몇 단계를 거쳐야 하며, 이 과정은 스스로 해보기를 바란다. $r = R\sin\theta$로 치환하면 나중에 $u = \cos\theta$가 나온다.

5.128 계산할 적분 $\int_{-R}^{R} I_{disk}(x)dx = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} m(x)\,[r(x)]^2 dx$에 알고 있는 값들을 모두 대입하면 $\frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} (f(x))^4 dx$이 된다. $(f(x))^4$을 전개한 후, $I_{sphere} = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4)dx$을 얻고, 이는 곧장 계산하면 된다.