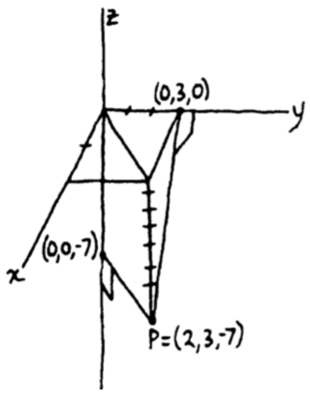
9장 벡터
연습문제 해답

9.1 개요

1. (다음 그림 참조)



   (a) <정리 9-1>을 이용하면 $\sqrt{1+4+81} = \sqrt{86}$

   (b) <정리 9-1>을 이용하면 $\sqrt{4+9+49} = \sqrt{62}$

   (c) 점 P는 xy 평면에서 7만큼 아래에 떨어져 있으므로 답은 7

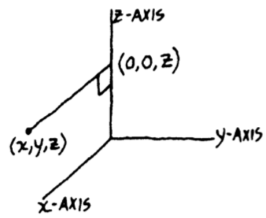
   (d) 점 P는 yz 평면에서 2만큼 앞쪽에 있으므로 답은 2

   (e) 점 P에서 z축에 수선의 발을 내리면 좌표는 (0, 0, -7) 이고 점 P와 이 수선의 발 사이의 거리가 답이므로 $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

   (f) 점 P에서 y축에 수선의 발을 내리면 좌표는 (0, 3, 0) 이고 점 P와 이 수선의 발 사이의 거리가 답이므로 $\sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

   (g) 점 (x, y, z)에서 x축에 수선의 발을 내리면 좌표는 $(x, 0, 0)$이고 이 점까지의 거리가 원하는 답이므로 $\sqrt{y^2+z^2}$

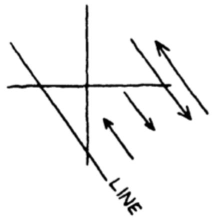
   (h) (아래 그림 참조) 점 (x, y, z)에서 z축에 수선의 발을 내리면 좌표는 $(0, 0, z)$이고 이 점까지의 거리가 원하는 답이므로 $\sqrt{x^2+y^2}$.



2. $\overrightarrow{AF} = (-4, 0, 3)$, $\overrightarrow{HB} = (4, 5, 0)$, $\overrightarrow{HE} = (4, 5, 3)$

3. $(0, 2)$

4. (아래 그림 참조) 직선의 방정식은 $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ 이고 기울기는 $-\frac{2}{3}$, 즉 오른쪽으로 3만큼 가고 아래로 2만큼씩 내려온다. 직선과 평행한 벡터는 (3, -2), (-3, 2), (6, -4), (-6, 4) 등등이다.



5. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, -3)$

6. 시점 - 종점 = (3, 1, 6). 시점 = (3, 1, 6) + (1, 0, 4) = (4, 1, 10)

7. $\overrightarrow{u} = (3\cos 120°, 3\sin 120°) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$

9.2 벡터의 합, 차, 상수배와 노름

1. (a) $\overrightarrow{DB}$
   (b) $\overrightarrow{DB}$
   (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$
   (d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
   (e) $\overrightarrow{0}$ (수 0이 아니고 벡터 $\overrightarrow{0}$)

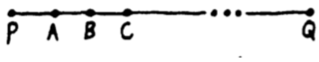
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 일 필요가 있으므로 $C - D = B - A = (-1, -2, -3)$, $D = (5, 5, 5) - (-1, -2, -3) = (6, 7, 8)$.

3. $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$, $\overrightarrow{CD} = (-2, -8, 8)$, $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ 이므로 두 직선은 평행하다.

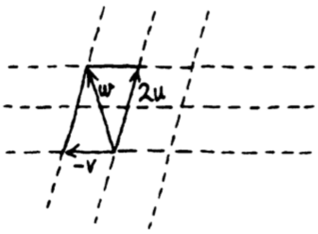
4. $\overrightarrow{AB} = (3, 6, -4)$, $\overrightarrow{QP} = (10, y, z-2)$. $\overrightarrow{QP}$ 가 $\overrightarrow{AB}$ 의 상수배일 필요가 있으므로 $10/3 = y/6$, $y = 20$ 이고 $10/3 = (z-2)/(-4)$, $z = -34/3$.

5. 세 점 A, B, C 가 모두 한 직선 위에 있기 위한 필요충분조건은 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{AC}$ 가 평행한 것이다. 그런데 $\overrightarrow{AB} = (-1, -6, 4)$ 이고 $\overrightarrow{AC} = (-4, -3, -3)$ 이므로 두 벡터는 상수배가 아니고 평행하지 않다. 따라서 세 점은 한 직선 위에 있지 않다.

6. (아래 그림 참조) $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{10}\overrightarrow{PQ}$ 이므로 $A - P = \frac{1}{10}(Q - P)$, $A = \frac{1}{10}(Q + 9P)$. 이와 비슷하게 $B = \frac{1}{10}(2Q + 8P)$, $C = \frac{1}{10}(3Q + 7P)$.



7. (아래 그림 참조) $\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u}$



8. (방법 1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} &= E - A + F - B + D - C \\ &= \frac{1}{2}(B + C) - A + \frac{1}{2}(A + C) - B + \frac{1}{2}(A + B) - C = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

(방법 2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

9. (a) $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$

   (b) $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\pi^2 + \pi^2 + \pi^2 + \pi^2 + \pi^2} = \pi\sqrt{5}$

10. $\overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\| = (2/\sqrt{104}, -6/\sqrt{104}, 8/\sqrt{104})$

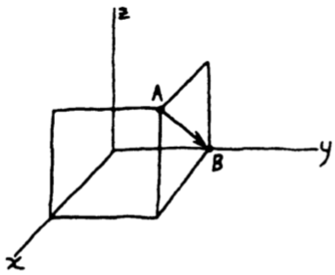
11. $\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{u}_{\text{normalized}} = -5\overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\|$

12. $\overrightarrow{BC} = 12\overrightarrow{BA}_{\text{normalized}} = 12(0, -1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$, $C - B = \left(0, \dfrac{-12}{\sqrt{17}}, \dfrac{-48}{\sqrt{17}}\right)$, $C = \left(1, 2 - \dfrac{12}{\sqrt{17}}, 6 - \dfrac{48}{\sqrt{17}}\right)$
(아래 그림 참조)

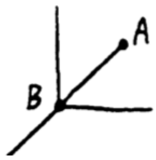
13. $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{38}$ 이므로 $\|217\overrightarrow{u}\| = 217\sqrt{38}$

14. $\overrightarrow{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$

15. (아래 그림 참조) 점 $A = (4, 5, 6)$ 에서 y-축에 수선의 발을 내리면 $B = (0, 5, 0)$ 이다. $\overrightarrow{u}$ 는 $\overrightarrow{AB}$ 와 방향이 같고 길이가 3 이므로 $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{AB}_{\text{normalized}} = 3(-4, 0, -6)_{\text{normalized}} = 3(-4/\sqrt{52}, 0, -6/\sqrt{52}) = (-12/\sqrt{52}, 0, -18/\sqrt{52})$.



16. (아래 그림 참조) 원점을 B라고 하면, $\overrightarrow{u}$ 는 $\overrightarrow{AB} = (-5, -6, -7)$ 과 방향이 같고 $\|\overrightarrow{u}\| = 1/(25 + 36 + 49) = 1/110$ 이므로 $\overrightarrow{u} = \frac{1}{110}\overrightarrow{AB}_{\text{normalized}} = \left(\frac{-5}{110\sqrt{110}}, \frac{-6}{110\sqrt{110}}, \frac{-7}{110\sqrt{110}}\right)$



17. (a) $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} = 5\vec{j} - 3\vec{k}$

    (b) $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

    (c) $\overrightarrow{u}_{\text{normalized}} = (2/\sqrt{14})\vec{i} + (3/\sqrt{14})\vec{j} - (1/\sqrt{14})\vec{k}$

18. $r^3\vec{r}$의 노름은 $\vec{r}$의 노름 곱하기 r^3 이므로 $r^3 r = r^4$

19. (아래 그림 참조) $\overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\|$ 와 $\overrightarrow{v}/\|\overrightarrow{v}\|$ 은 각각 $\overrightarrow{u}$ 와 $\overrightarrow{v}$ 방향으로의 단위 벡터이다. 두 벡터의 길이는 같기 때문에 두 벡터의 합은 “마름모”의 대각선이다. 반면에 $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ 는 평행사변형의 대각선이다. (반드시 마름모이지는 않는다). 각을 이등분하는 것은 마름모일 경우에만 해당한다.

9.3 내적

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 + 12 - 15 = 2$. $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ 이므로 사잇각은 예각

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos 180° = 30(-1) = -30$

3. $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 9), \overrightarrow{AC} = (3, -1, 5)$. $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{51}{\sqrt{91}\sqrt{35}} \approx 0.904$. $A = \cos^{-1} 0.904 \approx 25°$.

4. (a) θ_1 은 $\vec{u}$ 와 $\vec{i}$ 로 결정되므로 $\cos\theta_1 = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|} = \dfrac{u_1}{\|\vec{u}\|}$. 이와 마찬가지로 $\cos\theta_2 = u_2/\|\vec{u}\|$ 이고 $\cos\theta_3 = u_3/\|\vec{u}\|$.

(b) $(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3) = (u_1/\|\vec{u}\|, u_2/\|\vec{u}\|, u_3/\|\vec{u}\|) = \vec{u}/\|\vec{u}\| = \vec{u}_{\text{normalized}}$

5. (a) AB의 기울기 $= \frac{5}{3}$. CD의 기울기 $= -\frac{3}{5}$. 두 기울기의 곱이 -1이므로 두 직선은 서로 수직

   (b) $\overrightarrow{AB} = (3,5), \overrightarrow{CD} = (5,-3), \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 15 - 15 = 0$. 그러므로 두 직선은 서로 수직

6. 먼저 $\overrightarrow{AB} = (6,5)$ 방향으로 걷기 시작한다. 왼쪽으로 $90°$ 만큼 방향을 바꾸면 수직 방향인 $\overrightarrow{u} = (-5,6)$ 방향으로 걷게 되고 $\overrightarrow{BC}$는 $\overrightarrow{u}$와 방향이 같고 길이가 7인 벡터이므로 $\overrightarrow{BC} = 7\overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\|$, $C - B = (-35/\sqrt{61}, 42/\sqrt{61}), C = \left(8 - \dfrac{35}{\sqrt{61}}, 9 + \dfrac{42}{\sqrt{61}}\right)$

7. (아래 그림 참조) 첫번째 직선은 $\overrightarrow{u} = (-2,7)$과 평행이고 두번째 직선은 $\overrightarrow{v} = (1,4)$와 평행하다. 따라서 두 직선이 이루는 각도를 θ라고 하면 $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \dfrac{26}{\sqrt{53}\sqrt{17}}$

8. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$를 a로 나타내고 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = b$로 나타내면, $a\overrightarrow{v} - b\overrightarrow{u}$가 $\overrightarrow{u}$와 수직인 것을 보이기 위해서는 두 벡터의 내적이 0임을 보이면 된다. $\overrightarrow{u}\cdot(a\overrightarrow{v} - b\overrightarrow{u}) = a(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) - b(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u})(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}) = 0$. 그러므로 $\overrightarrow{u}$는 $a\overrightarrow{u} - b\overrightarrow{v}$와 수직이다.

9. (a) $\|-6\overrightarrow{u}\| = 6\|\overrightarrow{u}\| = 18$

   (b) $\overrightarrow{u}\cdot 3\overrightarrow{u} = 3(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}) = 3\|\overrightarrow{u}\|^2 = 27$

   (c) $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})} = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}} = \sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2} = \sqrt{9 - 10 + 4} = \sqrt{3}$

10. (a) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -33$이므로 $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| = 33$

   (b) 스칼라의 노름은 의미 없음

   (c) $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{16 + 9 + 1 + 16} = \sqrt{42}$이므로 $\|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{u} = (5\sqrt{42}, 2\sqrt{42}, 3\sqrt{42}), -4\sqrt{42})$

   (d) 벡터로 나룰 수 없으므로 의미 없음

   (e) $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{54}$이므로 $2/\|\overrightarrow{u}\| = 2/\sqrt{54}$

   (f) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -33$이므로 $(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{v} = (132, -99, 33, -132)$

   (g) 스칼라 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$와 벡터 $\overrightarrow{v}$를 내적할 수 없으므로 의미 없음

11. (a) (아래 그림 참조)

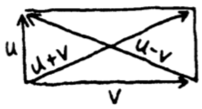
   (i) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$이므로 $\overrightarrow{u}$와 $\overrightarrow{v}$를 수직으로 그린다. 같은 그림에서 $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$와 $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$를 그리면 $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$와 $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$는 직사각형의 두 대각선 길이이고 직사각형의 두 대각선은 길이가 같으므로 $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$

   (ii)

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})} = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}} = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}}$$

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})} = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}} = \sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}}$$

   그러므로 $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$



(b) (아래 그림 참조)

(i) $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 를 그린다. $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$ 이므로 평행사변형은 마름모이다. 마름모의 두 대각선은 서로 직교하므로 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 와 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 는 서로 수직이다.

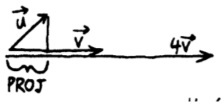
(ii) 만일 $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$ 이면 $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = 0$. 따라서 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 와 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 는 서로 수직이다.

12. (a) $(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})/\|\overrightarrow{v}\| = -7/\sqrt{11}$

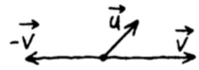
(b) $(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})/\|\overrightarrow{u}\| = -7/\sqrt{29}$

13. 반직선 DA, DC, DH 를 축으로 하면 $\overrightarrow{FH} = (-2,-10,0), \overrightarrow{AG} = (-2,10,7)$ 이므로 $(\overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{AG})/\|\overrightarrow{AG}\| = -96/\sqrt{153}$ 이다. 따라서 정사영한 선분의 길이는 $96/\sqrt{153}$ 이다.

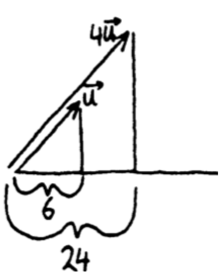
14. (a) (아래 그림 참조) 먼저 '기하학적인 방법'. (좀 더 합리적인 방법). $4\overrightarrow{v}$ 로 만들어지는 직선 위로의 정사영은 $\overrightarrow{v}$ 로 만들어진 직선 위로의 정사영과 동일하다. 따라서 답은 여전히 6. 다음으로 '대수적인 방법' (오버하는 방법). $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}/\|\overrightarrow{v}\| = 6$ 이 주어졌고, 따라서 $\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot 4\overrightarrow{v}}{\|4\overrightarrow{v}\|} = \dfrac{4(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})}{4\|\overrightarrow{v}\|} = \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = 6$.



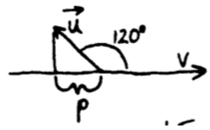
(b) $\overrightarrow{u}$ 와 $-\overrightarrow{v}$ 사이의 각은 둔각이다. $-\overrightarrow{v}$ 방향으로의 $\overrightarrow{u}$ 성분은 (즉, 방향이 있는 정사영) -6 이다.



(c) $\overrightarrow{u}$ 가 네 배가 되면, 정사영도 네 배가 된다. 답은 24



15. (아래 그림 참조) $p = \|\overrightarrow{u}\|\cos 60^\circ = 6(\frac{1}{2}) = 3$. $\overrightarrow{v}$ 방향으로의 $\overrightarrow{u}$ 의 성분은 -3.



16. 트랙 방향으로의 $\vec{w}$ 의 성분은 $(\vec{w} \cdot \vec{t})/\|\vec{t}\| = 6/\sqrt{5} > 2$. 따라서 인정될 수 없다.

17. $(\vec{f} \cdot \vec{v})/\|\vec{v}\| = 46/\sqrt{29} < 10$. 충분한 힘이 아니다.

18. 자기 자신의 방향으로의 성분이 최대다. 따라서 최댓값은 $\|\vec{u}\|$.

19. $\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{q}}{\vec{q} \cdot \vec{q}}\vec{q} = \frac{4}{29}(5\vec{i} - 2\vec{j}) = \frac{20}{29}\vec{i} - \frac{8}{29}\vec{j}$

20. $\vec{p}$ 이다. $\vec{u}$ 방향으로 더 긴 정사영을 갖는다.

9.4 외적

1. $\vec{u} \times \vec{v}$ 는 페이지를 뚫고 들어가는 방향. $\vec{p} \times \vec{q}$ 는 페이지 위에 있고 동쪽을 가리키는 방향. $\vec{s} \times \vec{t} = \vec{0}$

2. $\vec{u} = \vec{0}$ 이거나 $\vec{v} = \vec{0}$ 또는 $\vec{u}$ 와 $\vec{v}$ 가 0벡터가 아닌 나란하면서 수직인 벡터이다. 그러나 맨 마지막 조건 (수직이면서 평행)은 불가능하므로 $\vec{u} = \vec{0}$ 이거나 $\vec{v} = \vec{0}$ 이다.

3. $\vec{u}$ 와 $\vec{u}_{\text{normalized}}$ 는 평행이다. 평행한 벡터끼리의 외적은 $\vec{0}$ 이다.

4. 만일 $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ 이면 $\vec{b}$ 는 $\vec{a}$ 및 $\vec{x}$ 와 수직이다. 그러나 $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ 이면 $\vec{b}$ 는 $\vec{a}$ 와 수직이 아니다. 따라서 방정식을 만족하는 $\vec{x}$ 는 존재하지 않는다.

5. (a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \times \vec{w}$ 는 스칼라 $\times$ 벡터이므로 의미가 없다. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ 는 벡터와 벡터의 내적이므로 문제가 없다.
   (b) $\vec{v} \times \vec{u}$ 는 $\vec{u}$ (그리고 $\vec{v}$)와 수직이므로 $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$ 이다. (0벡터가 아니라 스칼라 0이다.)
   (c) $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ 이므로 $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$.

6. (방법 1)

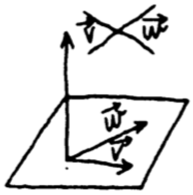
$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \times \vec{u} + \vec{v} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} \\ &= \vec{0} + \vec{0} + (-(\vec{u} \times \vec{v})) + \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}\end{aligned}$$

   (방법 2) 어떤 한 벡터, 즉 $\vec{u} + \vec{v}$ 와 자신과의 외적은 $\vec{0}$

7. $\vec{u} \times \vec{v}$ 와 $\vec{p} \times \vec{q}$ 는 건물 바닥에 수직이므로 두 벡터는 평행하다. 그러므로 $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{p} \times \vec{q}) = \vec{0}$.

8. $3\vec{u} \times (4\vec{u} + 5\vec{v}) = 12(\vec{u} \times \vec{u}) + 15(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0} + 15(\vec{u} \times \vec{v}) = 15(\vec{u} \times \vec{v})$

9. (아래 그림 참조) $\vec{v} \times \vec{w}$ 는 $\vec{v}$ 와 $\vec{w}$ 로 이루어진 평면에 수직이다. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ 는 $\vec{v} \times \vec{w}$ (그리고 $\vec{u}$)에 수직이다. $\vec{v} \times \vec{w}$ 에 수직인 모든 벡터들은 다시 $\vec{v}$ 와 $\vec{w}$ 로 이루어진 평면으로 되돌아 온다. 따라서 $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ 는 $\vec{v}$ 와 $\vec{w}$ 로 이루어진 평면 위에 있다.



10. (a) $(-11,-12,27)$

    (b) $-17\vec{i}+13\vec{j}+\vec{k}$

    (c) $(0,0,21)$

    (d) $(4,-2,11)$

11. $\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{v}=(-13,11,-3)$, $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=-(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{v})=(13,-11,3)$

12.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\}} = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{30}}\\ \sin\theta &= \frac{\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\|(9,-5,17)\|}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\sqrt{395}}{\sqrt{14}\sqrt{30}}\\ \cos^2\theta+\sin^2\theta &= \frac{25}{(14)(3)}+\frac{395}{(14)(30}=1\end{aligned}$$

13. (a) $\overrightarrow{u}$와 내적하여 0이 되는 벡터면 된다. 예를 들어 $\vec{i}+2\vec{j}$, $6\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$ 등

    (b) 오직 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-3,27,11)$와 이 벡터의 상수배만 해당한다.

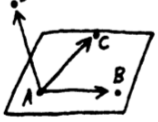
14. $\overrightarrow{AB}=(4,-6,3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,-6,7)$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-24,-31,-30)$, 평행사변형의 넓이 $=\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$이고 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\sqrt{(24)^2+(31)^2+(30)^2}$.

9.5 스칼라 삼중곱

1. $(1,2,3)\cdot(1,4,-3)=0$

2. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=-16$. 부피는 16

3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=(1,2,3)\cdot(1,-1,2)\times(1,-4,-3)=(1,2,3)\cdot(11,5,-3)=12\neq 0$. 벡터들이 같은 평면 위에 있지 않다. 그러므로 점 A, B, C, D는 같은 평면 위에 있지 않다. (아래 그림 참조)



4. $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}$는 바닥의 아래쪽을 향하고 $\overrightarrow{u}$와 둔각을 이루므로 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}$는 음수다.

5. 벡터들을 모두 시점에 같도록 놓으면 모두 한 평면 위에 있는 벡터들이므로 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=0$.

6. (a) -5 (순환 치환)

   (b) 5 (비순환 치환)

   (c) 5

   (d) $60(\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{r}) = -300$

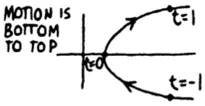
   (e) (방법 1) $\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ 는 (사실상 두 개의 벡터만 있는 것이므로) 한 평면 위의 벡터들이므로 스칼라 삼중곱은 0
   (방법 2) $\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} \times \overrightarrow{q}$ (순환 치환) $= \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{0} = 0$
   (방법 3) $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ 는 $\overrightarrow{q}$ 에 수직이므로 내적 $\overrightarrow{q} \cdot (\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q})$ 는 0이다.

   (f) (방법 1) (e)와 같다.
   (방법 2) $\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{0} = 0$

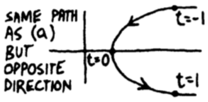
9.6 속도벡터

1. (아래 그림들 참조)

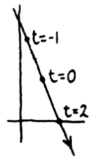
   (a) $x = y^2 + 5$



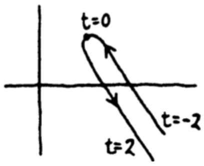
   (b) $x = y^2 + 5$



   (c) $y = 4 - 2(x - 2) = 8 - 2x$

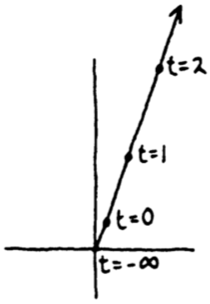


   (d) 다시 $y = 8 - 2x$. 그러나 물체는 직선의 반 정도에서만 움직이고 똑같은 곳을 되돌아 간다.



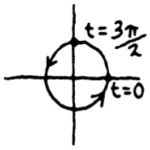
   (e) $y = 2x$. $y = 2x$ 의 그래프는 직선이지만 물체는 이 직선의 일부만 움직인다.

t	$\overrightarrow{r}(t)$
-100	$(e^{-100}, 2e^{-100})$
-1	$(e^{-1}, 2e^{-1})$
0	$(1, 2)$
10	$(e^{10}, 2e^{10})$
등등	

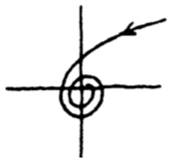


2. (아래 그림들 참조)

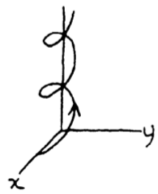
   (a) 반지름이 4 인 원 모양이고 시계 반대 방향으로 6π 초마다 한 바퀴씩 회전함



   (b) 반지름 $1/t$ 인 원운동, 즉 나선형 운동을 한다. $\lim_{t\to 0+}(\cos t)/t = 1/0+ = \infty, \lim_{t\to 0+}(\sin t)/t = 1$ 이므로 시간 $t = 0$ 일 때 물체는 $(-\infty, 1)$ 에서 출발하여 안으로 들어오다가 시간 $t = \pi/2$ 에서 y-축을 지나고 원점을 향해 나선형으로 돌아 들어오게 된다.



   (c) $z = t$ 이므로 물체는 빙글빙글 돌면서 위로 올라간다.



3. (a) 한 가지 가능한 방정식은 $x = 3\sin t, y = 3\cos t$ 이다. $x = 3\cos t, y = -3\sin t$ 도 가능하다.

   (b) $x = 2 + 3\cos t, y = 7 + 3\sin t$

   (c) $x = 3\cos 2\pi t, y = 3\sin 2\pi t$

4. (a) $x = -3$ 이면 $2 - t = -3$ 으로부터 $t = 5$ 인데 $t = 5$ 일 때 $z = 4$ 가 아니다. 즉 이 점은 경로상에 없다.

(b) $x = 3$이면 $2 - t = 3$으로부터 $t = -1$이고 $t = -1$이면 $y = 4, z = -6$이므로 이 점은 경로 위의 점이다. $t = -1$일 때 이 점에 도달한다.

5. 물체들은 동일한 경로를 따라 움직이지만 두 번째 물체는 첫 번째 물체보다 5초 후에 동일한 지점을 지나게 된다. 예를 들어 $t = 0$일 때 첫 번째 물체는 원점에 있지만 두 번째 물체는 $t = 5$이 되어야 원점에 도달한다.

6. 물체와 원점까지의 거리는 언제나 7이다.

   (a) 원점이 중심이고 반지름이 7인 원 위를 움직인다.

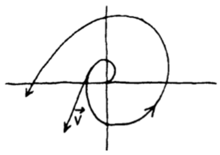
   (b) 원점이 중심이고 반지름이 7인 구 위를 움직인다.

7. $\vec{v} = 3t^2\vec{i} + 2\vec{j} - \sin t\vec{k}$

8. (a) 경로는 반지름이 t인 원, 즉 나선형이다. (아래 그림 참조)

   (b) $\vec{v} = (-t\sin t + \cos t)\vec{i} + (t\cos t + \sin t)\vec{j}$. 시각 $t = \pi$일 때, $\vec{v} = -\vec{i} - \pi\vec{j}$.

   (c) (아래 그림 참조)



9. $\vec{v} = -6\sin t\vec{i} + 6\cos t\vec{j}$

   (a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{36\sin^2 t + 36\cos^2 t} = \sqrt{36(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 6$. 원의 반지름은 6이고 둘레 길이는 12π이다. 2π초 동안 한 바퀴 도는 속도는 2π 초당 12π, 즉 6으로 $\|\vec{v}\|$와 동일하다.

   (b) $\vec{v} = -6\vec{i}$이고 반시계 방향을 가리킨다. (아래 그림 참조)

10. $\vec{v} = (1, 2t)$. 속력은 $\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 4t^2}$. t가 $-\infty$에서 0으로 갈 때, 속력은 줄어든다. t가 0에서 ∞로 갈 때, 속력은 커진다. 그러므로 물체는 감속하였다가 가속한다.

11. 물체의 위치에 대한 극형식으로 표현한 좌표는 $r = 1, \theta = t^2$이다. 반지름이 1인 원 위를 움직인다. $\vec{v} = (-2t\sin t^2,\ 2t\cos t^2), \|\vec{v}\| = \sqrt{4t^2((\sin t^2)^2 + (\cos t^2)^2)} = \sqrt{4t^2} = 2|t|$. t가 $-\infty$에서 0이 될 때, 속력 $2|t|$는 (∞에서 0으로) 감소하고 t가 0에서 ∞가 될 때 (0에서 ∞)로 증가한다.

12. $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

   (a) $\vec{v}$가 상수이므로 물체는 일정한 방향으로 움직이고 경로는 직선이다.

   (b) $\|\vec{v}\| = \sqrt{29}$

   (c) $(3, -2, 4)$를 방향은 유지하면서 노름이 2가 되도록 바꾸고자 한다. $\vec{v} = 2(3, -2, 4)_{\text{normalized}} = (6/\sqrt{29}, -4/\sqrt{29}, 8/\sqrt{29})$. $\vec{r} = \left(-1 + \dfrac{6}{\sqrt{29}}t\right)\vec{i} + \left(1 - \dfrac{4}{\sqrt{29}}t\right)\vec{j} + \dfrac{8}{\sqrt{29}}t\vec{k}$.

13. (a) 물체가 원점에 계속 머물러 있다.

    (b) 속도와 속력이 모두 0 이므로 물체는 움직이지 않는다. (꼭 원점에서 머물러 있는 것은 아니다)

14. (a) 역미분을 하면 $x = t^2 + C_1, y = \frac{5}{3}t^3 + C_2, z = 6t + C_3$ 를 얻는다. $t = 3$ 일 때 $x = 1, y = 4, z = 6$ 이어야 하므로 $1 = 9 + C_1$ 으로부터 $C_1 = -8$ 이다. 비슷하게 $C_2 = -41, C_3 = -12$ 이다. 그러므로 $\vec{r} = (t^2 - 8)\vec{i} + (\frac{5}{3}t^3 - 41)\vec{j} + (6t - 12)\vec{k}$ 이다.

    (b) $t = 2$ 이면 $\vec{v} = 4\vec{i} + 20\vec{j} + 6\vec{k}$ 이다. 단위 접선 벡터는 $\vec{v}_{\text{normalized}} = (4/\sqrt{452})\vec{i} + (20/\sqrt{452})\vec{j} + (6/\sqrt{452})\vec{k}$.

15. (a) $(\frac{1}{3}x)^2 + (\frac{1}{2}y)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. 그러므로 경로는 타원 $x^2/9 + y^2/4 = 1$ 이다.

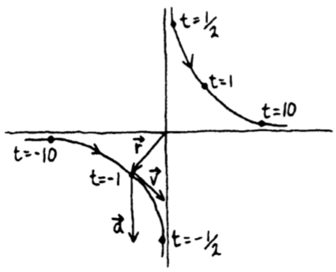
    (b) $\vec{v} = (-3\sin t, 2\cos t)$, 속력 $= \|\vec{v}\| = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{9\sin^2 t + 4(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{5\sin^2 t + 4}$. 속력은 $\sin^t = 0$ 일 때 즉 $t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ 일 때 최소다. 그리고 이때 속력의 최솟값은 2 다. 속력은 $\sin^2 = 1$ 일 때 즉 $t = \pi/2, 3\pi/2, \ldots$ 일 때 최대다. 속력의 최댓값은 3 이다.

9.7 가속도벡터

1. (a) $xy = 1$, 경로는 쌍곡선 형태이다 (아래 그림 참조)

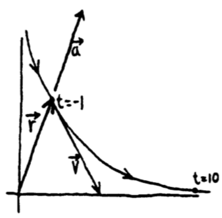
   (b) $\vec{v} = \vec{i} - (1/t^2)\vec{j}$, $\vec{a} = (2/t^3)\vec{j}$. $t = -1$ 이면 $\vec{r} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{a} = -2\vec{j}$, $a_{tan} = (\vec{a} \cdot \vec{v})/\|\vec{v}\| = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$. 물체는 초당 $\sqrt{2}m/sec$ 만큼씩 속력이 증가하고 있다.

   (c) $\|\vec{a}\| = 2$ 이므로 물체의 질량이 m 이라면 $2m$ 만큼의 힘이 작용한다 ($\vec{a}$ 의 방향으로, 즉 아래 방향으로).



2. (a) $xy = 1$ 이지만 $x > 0, y > 0$ 이므로 1사분면 부분의 그래프 위만 움직인다. (아래 그림 참조) $\vec{v} = e^t\vec{i} - e^{-t}\vec{j}$, $\vec{a} = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j}$.

   (b) $t = -1$ 이면 $\vec{r} = (1/e)\vec{i} + e\vec{j}$, $\vec{v} = (1/e)\vec{i} - e\vec{j}$, $\vec{a} = (1/e)\vec{i} + e\vec{j}$. $\vec{a} \cdot \vec{v} = 1/e^2 - e^2 < 0$ 이므로 $t = -1$ 일 때 a_{tan} 은 음수다. 즉 물체의 속력이 줄어들고 있다.



3. $\vec{r}'' = \vec{a} = \vec{f}/m$, $\vec{r} \times \vec{r}'' = \vec{r} \times (\vec{f}/m) = (1/m)(\vec{r} \times \vec{f})$. $\vec{r}$ 의 방향은 원점으로부터 물체를 가리키는 쪽이다. 가정에 의해 $\vec{f}$ 의 방향은 물체로부터 원점을 향하는 쪽이다. (아래 그림 참조) 그러므로 $\vec{f}$ 와 $\vec{r}$ 은 평행하고 (방향은 정반대) 두 벡터의 외적은 0 이다.

4. $\vec{f} = -mg\vec{j}$ 이고 $\vec{f} = m\vec{a}$ 이므로 $\vec{a} = -g\vec{j}$, 즉 $x'' = 0, y'' = -g$ 이다. 역미분을 하면 $x' = C_1, y' = -gt + C_2$ 을 얻고 $t = 0$ 이면 $\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ 이므로 $C_1 = 4, C_2 = 2$ 이다. 다시 한 번 역미분을 하면 $x = 4t + K_1, y = -\frac{1}{2}gt^2 + 2t + K_2$ 를 얻는다. $t = 0$ 이면 $x = 1, y = 2$ 이므로 $K_1 = 1, K_2 = 2$ 이다. 그러므로 $\vec{r} = (4t+1)\vec{i} + (-\frac{1}{2}gt^2 + 2t + 2)\vec{j}$ 이다.

5. (a) ds/dt 는 시간에 대해 움직인 거리의 변화율이므로 이것은 차량의 속력이다. 즉 $ds/dt = \|\vec{v}\|$, $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{d(ds/dt)}{dt} = \dfrac{d(\text{속력})}{dt} =$ 속력의 변화율 $=$ 차량의 가속도. 그러므로 $d^2s/dt^2 = a_{tan}$.

   (b) $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \dfrac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{v}_{\text{normalized}} =$ 단위 접선 벡터

6. (a) $\vec{v} = (-5\sin t, 5\cos t)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t} = \sqrt{25(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 5$

   (b) $\vec{a} = (-5\cos t, -5\sin t)$, $a_{tan} = 0$ 왜냐하면 $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ 이기 때문

   (c) $\vec{r} = (-5\cos t, -5\sin t)$ 는 방사 방향, $a_{rad} =$ 방사 방향의 성분 $= (\vec{a} \cdot -\vec{r})/\| - \vec{r}\| = \frac{1}{5}(25\cos^2 t + 25\sin^2 t) = 5$. 또한 $\|v\|^2/r = (5)^2/5 = 5$

7. (a) 물체에 작용하는 힘 $m\vec{a}$ 이 방향을 바꾸게 하지 않으므로 $\vec{a}$ 는 $\vec{v}$ 와 평행

   (b) 속력에 변화가 없으므로 $a_{tan} = 0$ 따라서 $\vec{a}$ 는 $\vec{v}$ 에 수직

8. (a) $t = 1$ 일 때 $x = 3, y = 5/4$ 이므로 $(3, 5/4)$ 에 있다.

   (b) $\vec{v} = (-3t^2, t^3 + 1)$ 이므로 $t = 1$ 일 때 $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ 방향으로 순간적으로 움직이며 속력은 $\|\vec{v}\| = \sqrt{13}$ m/sec 이다.

   (c) $\vec{a} = (-6t, 3t^2)$ 이므로 $t = 1$ 일 때 $\vec{a} = -6\vec{i} + 3\vec{j}$ 이고 $(\vec{a} \cdot \vec{v})/\|\vec{v}\| = 24/\sqrt{13}$, 즉 초당 $24/\sqrt{13}m/sec$ 만큼씩 속력이 증가하고 있다.

   (d) 질량이 m 이라고 하면, 힘은 $m\|\vec{a}\| = m\sqrt{45}$ N 만큼 $\vec{a}$ 의 방향으로 작용한다.