8장 급수
연습문제 해답

8.1 개요

1. (a) $(-1)^3\frac{1}{7}+(-1)^4\frac{1}{9}+(-1)^5\frac{1}{11}$, 즉 $-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$

   (b) $a_1+4a_2+9a_3$

2. (a) 부분합은 $1,-1,2,-2,3,-3,\cdots$. 점점 커지면서 진동하므로 급수는 발산한다.

   (b) 부분합은 $\frac{1}{2},1,1\frac{1}{2},2,2\frac{1}{2},3,\cdots$ 은 ∞로 다가가므로 급수는 ∞로 발산한다.

3. (a) $n\to\infty$일 때 $S_n\to\infty$이고 급수는 (∞로) 발산한다. 부분합이 $1,2,3,4,5,\cdots$ 이므로 급수 자체는 $1+1+1+1+1+\cdot$이다.

   (b) $n\to\infty$일 때 $S_n\to 1$이므로 급수는 1로 수렴한다. 부분합이 $1,1,1,1,1,\cdots$ 이므로 급수는 $1+0+0+0+0+\cdots$ 이다.

4. 급수는 $(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots$ 이다. 부분합은 $S_1=1-\frac{1}{2}$, $S_2=1-\frac{1}{3}$, $S_3=1-\frac{1}{4}$ 등등이다. 부분합의 극한은 1이고 급수는 1로 수렴한다.

5. $1+2+3+4+\cdots$ 와 $1+1+1+1+\cdots$ 는 모두 (∞로) 발산하고 두 급수의 합으로 만들어진 $2+3+4+5+\cdots$ 도 또한 발산한다. 반면에 $1+1+1+1+\cdots$ 와 $(-1)+(-1)+(-1)+\cdots$ 는 모두 발산하지만 두 급수의 합으로 만들어진 $0+0+0+0+\cdots$ 는 0으로 수렴한다.

6. S_{99}는 첫 99개 항을 더한 것이고 S_{100}은 첫 100개 항을 더한 것이므로 $S_{100}-S_{99}=a_{100}$이다.

8.2 등비급수

1. $r=-\frac{1}{6}$, $a=-1$이다. $-1<r<1$이므로 급수는 수렴하고 합은 $-1/(1-(-\frac{1}{6}))=-\frac{6}{7}$이다.

2. $r=-\frac{1}{4}, a=\frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}/(1-(-\frac{1}{4}))=\frac{1}{5}$로 수렴한다.

3. $r=\frac{3}{2}>1$. 급수는 (∞로) 발산한다.

4. $r=3>1$. 급수는 (∞로) 발산한다.

5. 급수는 $1/4^3+1/4^4+1/4^5+\cdots$ 이므로 $a=1/4^3, r=1/4$이고 $\frac{1}{4^3}/(1-1/4)=1/48$로 수렴한다.

6. $a=\frac{1}{4}, r=(\frac{2}{3})^2$. 급수는 $\frac{1}{4}/(1-(\frac{2}{3})^2)=\frac{9}{20}$으로 수렴한다.

7. $a = 0.1, r = 0.1$. $0.1/(1-0.1) = \frac{1}{9}$ 로 수렴한다.

8. 급수는 $\sin^2\theta + \sin^4\theta + \sin^6\theta + \cdots$ 이다. $a = \sin^2\theta$, $r = \sin^2\theta$ 이고 $\theta \neq \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$ 이면 $-1 < r < 1$ 이므로 $\sin^2\theta/(1-\sin^2\theta) = \sin^2\theta/\cos^2\theta = \tan^2\theta$ 로 수렴한다.

9. 급수는 $1/\pi + 1/\pi^3 + 1/\pi^5 + \cdots$ 이다. $a = 1/\pi$, $r = 1/\pi^2$ 이므로 $\dfrac{1/\pi}{1-1/\pi^2} = \pi/(\pi^2-1)$ 로 수렴한다.

8.3 양항급수의 수렴 판정법 I

1. (a) 거짓
   (b) 참
   (c) 거짓
   (d) 참

2. (a) $n!$ 가 더 높은 증가 차수를 가지므로 $n \to \infty$ 일 때 $n!/4^n \to \infty$ 이고 일반항 판정법에 의해 이 급수는 발산한다.
   (b) 4^n 이 더 높은 증가 차수를 가지므로 $n \to \infty$ 일 때 $n^2/4^n \to 0$ 이다. 일반항 판정법으로는 어떠한 결론도 내릴 수 없다.

3. (a) $r = 1/3$ 인 등비급수고 수렴한다.
   (b) $p = 2$ 인 p-급수이고 수렴한다.
   (c) $p = 1/2$ 인 p-급수이고 발산한다.
   (d) $n \to \infty$ 일 때 일반항 $\sqrt{n} \to \infty$ 이므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.
   (e) 표준 수렴 급수이다.
   (f) $p = 3$ 인 p-급수이고 수렴한다.
   (g) $p = 3/2$ 인 p-급수의 홀수항의 합으로 이루어진 부분급수이므로 수렴한다.
   (h) 5와 6을 제외하면 조화급수이고 발산한다.
   (i) 일반항 $n/(n+1)$ 이 0이 아닌 1로 수렴하므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.
   (j) $1/2^n n! < 1/n!$ 이고 $\sum 1/n!$ 은 수렴하는 급수이므로 비교 판정법에 의해 수렴한다.
   (k) $1/n2^n < 1/2^n$ 이고 $\sum 1/2^n$ 은 수렴하는 등비급수이므로 비교 판정법에 의해 수렴한다.
   (l) $p = 5$ 인 p-급수이고 수렴한다.
   (m) $r = 1/5$ 인 등비급수이고 수렴한다.
   (n) $1/ne^n < 1/e^n$ 이고 $1/e^3 + 1/e^4 + \cdots$ 는 $r = 1/e$ 인 수렴하는 등비급수이므로 비교 판정법에 의해 수렴한다.
   (o) $p = 2$ 인 p-급수이고 수렴한다.
   (p) $\frac{1}{8} + \frac{1}{88} + \frac{1}{888} + \cdots < \frac{1}{8} + \frac{1}{80} + \frac{1}{800} + \cdots$ 이고 $\frac{1}{8} + \frac{1}{80} + \frac{1}{800} + \cdots$ 는 $r = 1/10$ 인 수렴하는 등비급수이므로 비교 판정법에 의해 수렴한다.
   (q) 수렴하는 급수인 $\sum 1/n!$ 의 짝수항으로 이루어진 부분급수이므로 수렴한다.

4. (a) $\sum a_n$ 이 수렴하므로 $a_n \to 0$ 이다. 그러면 $1/a_n$ 은 0 으로 수렴하지 않는다. 따라서 $\sum 1/a_n$ 은 일반항 판정법에 의해 발산한다.

   (b) $a_n/n! < a_n$ 이다. 따라서 $\sum a_n$ 이 수렴한다면 비교 판정법에 의해 $\sum a_n/n!$ 도 수렴한다.

   (c) 수렴과 발산을 말할 수 없다. 만일 $\sum a_n$ 이 $\sum 1/n!$ 이라면 $\sum n!a_n = 1 + 1 + 1 + \cdots$ 이고 발산한다. 만일 $\sum a_n$ 이 $\sum 1/(n!)^2$ 이면 $\sum n!a_n = \sum 1/n!$ 이고 수렴한다.

   (d) $\sum a_n$ 이 수렴하므로 $a_n \to 0$ 이다. 그러면 $\cos a_n \to 1$ 이고 일반항 판정법에 의해 $\sum \cos a_n$ 은 발산한다.

8.4 양항급수의 수렴 판정법 II

1. $\frac{1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2+n/2} < \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$. 그런데 $\sum 1/n^2$ 은 $p = 2$ 인 p-급수이므로 수렴하고 $\sum 1/(2n^2+n)$ 도 수렴한다.

2. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[2(n+1)!]!(3n)!}{[3(n+1)]!(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$
   $n \to \infty$ 일 때 $a_{n+1}/a_n \to 0$ 이고 (분모는 3차, 분자는 2차 다항식) 비율 판정법에 의해 수렴한다.

3. $p = 1/3$ 인 p-급수이고 발산한다.

4. $r = 1/3$ 인 등비급수이므로 수렴한다.

5. $n \to \infty$ 일 때 $n!/10^n$ 이 0 으로 다가가지 않는다. 일반항 판정법에 의해 급수는 발산한다.

6. $n \to \infty$ 일 때, $\sqrt[n]{2} \to 1$ 이므로 $1/\sqrt[n]{2}$ 가 0 으로 수렴하지 않는다. 따라서 $\sum 1/\sqrt[n]{2}$ 는 일반항 판정법에 의해 발산한다.

7. $\sum 1/n^3$ 과 특성이 같고 이 급수는 $p = 3$ 인 p-급수이므로 수렴한다.

8. $-\sum(n-1)/n^2$ 은 $-\sum 1/n$ 과 수렴 특성이 비슷하고 $\sum 1/n$ 은 발산하는 조화급수이므로 급수는 발산한다.

9. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2(\frac{3}{4})^{n+1}}{n^2(\frac{3}{4})^n} = \frac{3}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$
   이 극한은 $n \to \infty$ 일 때 $\frac{3}{4}$ 이다. 비율 판정법에 의해 급수는 수렴한다.

10. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1}$$
    이 극한은 $n \to \infty$ 일 때 0 이다. 비율 판정법에 의해 급수는 수렴한다.

11. $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ 인데 $\sum 1/\sqrt{n}$ 은 $p = 1/2$ 인 p-급수이므로 발산하고 따라서 $\sum \ln n/\sqrt{n}$ 도 발산한다.

12. $n \to \infty$ 일 때 $(n-1)/n$ 이 0 으로 수렴하지 않으므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.

13. $2\sum 1/n$ 과 특성이 같고 $\sum 1/n$ 은 발산하는 조화급수이므로 원래의 급수도 발산한다.

14.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$n \to \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{5}$. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

15. $r = 0.1$ 인 등비급수이므로 수렴한다.

16.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 6 \cdots (3n)(3n+3)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} = \frac{2n+1}{3n+3}$$

$n \to \infty$ 일 때 극한은 $\frac{2}{3}$. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

17. $r = 1/5$ 인 등비급수이므로 수렴한다.

18.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{(n+1)!} = \frac{n+2}{2n+3}$$

$n \to \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{2}$. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

19. $-1 < r = e/3 < 1$ 인 등비급수이므로 수렴한다.

20. $r = e/2 > 1$ 인 등비급수이므로 발산한다.

21. 수렴하는 ($p = 2$ 인 p-급수) $\sum 1/n^2$ 의 홀수항으로만 이루어진 부분급수이므로 수렴한다.

22. $1/n(n+1) < 1/n^2$ 이고 $\sum 1/n^2$ 은 $p = 2$ 인 $p-$ 급수이므로 수렴한다. 따라서 $\sum 1/n(n+1)$ 도 수렴한다.

23. $(n+1)/n\sqrt{n} > n/n\sqrt{n} = 1/\sqrt{n}$ 이고 $\sum 1/\sqrt{n}$ 은 $p = 1/2$ 인 $p-$ 급수이므로 발산한다. 따라서 $\sum (n+1)/n\sqrt{n}$ 도 발산한다.

24. $n \to \infty$ 일 때 $n/(n-1) \to 1$ 이므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.

25.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$n \to \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{4}$ 이다. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

26.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}}\frac{3^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$n \to \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{3}$ 이다. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

27. $a_n = \dfrac{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)}{(2n+3)!}$ 이고 $a_{n+1} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)(2n+4)}{(2n+5)!}$ 이므로
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+4}{(2n+5)(2n+4)} = \frac{1}{2n+5}$$

$n \to \infty$ 일 때 극한은 0 이다. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

28. 주어진 급수는 $\sum \sqrt{n}/n = \sum 1/\sqrt{n}$ 과 수렴 특성이 비슷하고 $\sum 1/\sqrt{n}$ 이 발산하므로 급수는 발산한다.

29. $r = \frac{3}{4}$ 인 등비급수이므로 수렴한다.

30. $\dfrac{n+1}{n^2} > \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ 인데 $\sum 1/n$ 이 발산하므로 $\sum (n+1)/n^2$ 도 발산한다.

31. $\sum 1/(4n-2)$ 는 $\frac{1}{4}\sum 1/n$ 과 수렴특성이 비슷하고 $\sum 1/n$ 이 발산하므로 급수는 발산한다.

32. $\dfrac{1}{n4^n} < \dfrac{1}{4^n}$ 이고 $\sum 1/4^n$ 은 수렴하는 등비급수이므로 $\sum 1/n4^n$ 도 수렴한다.

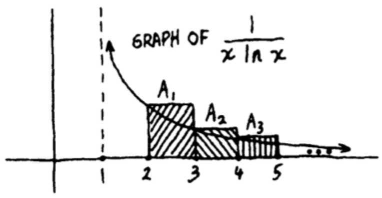
33. $\ln n$ 이 $\sqrt{n}$ 보다 더 낮은 증가차수를 가지므로 $\ln n < \sqrt{n}$ 이다. 따라서 $\dfrac{\ln n}{n^2} < \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = 1/n^{3/2}$ 이고 $\sum 1/n^{3/2}$ 는 $p = 3/2$ 인 p-급수이므로 수렴한다. 따라서 $\sum (\ln n)/n^2$ 도 수렴한다.

34. $\dfrac{1}{n^2 \ln n} < \dfrac{1}{n^2}$ 이고 $\sum 1/n^2$ 은 $p = 2$ 인 p-급수이므로 수렴한다. 따라서 $\sum 1/(n^2 \ln n)$ 도 수렴한다.

35. (아래 그림 참조)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots &= A_1 + A_2 + A_3 + \cdots \\ &\geq \int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}dx = \int_{\ln 2}^\infty 1/u\ du = \ln u\Big|_{\ln 2}^\infty = \infty\end{aligned}$$

그러므로 주어진 급수는 발산한다.



36. (a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^\infty 1/(2n-1)$ 은 $\frac{1}{2}\sum 1/n$ 과 수렴 특성이 비슷하고 $\sum 1/n$ 이 발산하므로 급수는 발산한다. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \sum 1/2n = \frac{1}{2}\sum 1/n$ 도 발산한다.

    (b) 대단히 많이 존재한다. 예를 들어 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ 는 $r = \frac{1}{2}$ 인 등비급수로서 수렴한다. 또 다른 예는 $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$ 는 $p = 2$ 인 p-급수로서 수렴한다.

37. (a) $\sum a_n$ 이 $\sum 1/n^2$ 이라고 하면, 이 급수는 수렴하지만 $\sum na_n = \sum 1/n$ 은 발산한다. 한편 $\sum a_n = \sum 1/n^3$ 이라고 하면, 이 급수는 수렴하고 $\sum na_n = \sum 1/n^2$ 도 수렴한다.

    (b) $\sum a_n$ 이 비율 판정법에 의해 수렴한다면, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1$ 이다. 그러면 $\sum na_n$ 에 대한 비율 판정법은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \times (1$ 보다 작은 값). 따라서 극한은 1보다 작고 $\sum na_n$ 은 비율 판정법에 의해 수렴한다.

8.5 교대급수

1. $1/\sqrt{n} \downarrow 0$ 이므로 $\sum (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ 은 교대급수 판정법에 의해 수렴한다. S_{24} 를 사용하면 추정 오차는 $1/\sqrt{25} = 1/5$ 보다 작고 맨 마지막 항 $1/\sqrt{24}$ 가 빼는 값이므로 추정값은 급수의 합보다 작다.

2. (a) $1/n! \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 이해 주어진 급수는 수렴한다. 0.001보다 처음으로 작아지는 항은 $1/7!$ 이므로 $1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + 1/5! - 1/6! = \frac{455}{720}$ 을 추정값으로 사용한다.

(b) $1/n^n \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. 0.001보다 처음으로 작아지는 항은 $1/5^5$ 이므로 $1/4^4$ 을 추정값으로 사용한다. (즉, 첫 항만 더한다)

3. (a) 거짓

   (b) 일반항 판정법에 의해 참

4. (a) $n^2/n! \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

   (b) $n!/n^2$ 은 0으로 수렴하지 않는다. 따라서 일반항 판정법에 의해 주어진 급수는 발산한다.

   (c) $1/n \ln n \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

   (d) $2n/(n^2+4) \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

   (e) $r = -0.1$ 인 등비급수이므로 수렴한다.

   (f) 항들이 1로 수렴하므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.

   (g) $\sqrt{n-1}/n \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

5. (a) 참. $\sum b_n$ 이 수렴하면 $b_n \to 0$ 이다. 궁극적으로는 $0 < b_n < 1$ 이고 그러면 $b_n^2 < b_n$ 이다. 그러므로 $\sum b_n^2$ 은 비교 판정법에 의해 수렴한다.

   (b) 거짓. 만일 $b_n = 1/\sqrt{n}$ 이면 $\sum(-1)^{n+1}b_n$ 은 교대급수 판정법에 의해 수렴한다. 그러나 $\sum b_n^2$ 은 $\sum 1/n$ 이고 발산한다.

6. (a) 모든 경우에 $a_n \downarrow 0$ 이므로 모든 급수는 수렴한다.

   (b) 8.3절 [표 8-1]의 교대급수 버전으로 생각하면, 조건 수렴과 절대 수렴을 구분하는 선은 [표 8-1]에서 수렴과 발산을 구분하는 선과 같은 위치에 있다. 즉 $\sum(-1)^{n+1}1/n^p$ 은 $p \le 1$ 이면 조건 수렴이고 $p > 1$ 이면 절대 수렴이다.

7. (a) $n/(1+n^2) \downarrow 0$ 이므로 급수는 수렴한다. 그러나 절대값의 급수인 $\sum n/(1+n^2)$ 은 $\sum 1/n$ 과 수렴 특성이 같고, 이 급수는 발산한다. 그러므로 주어진 급수는 조건 수렴한다.

   (b) 절대값의 급수인 $\sum(n+2)/(n^2+3)$ 은 $\sum n/n^3 = \sum 1/n^2$ 와 수렴 특성이 같고, 이 급수는 수렴한다. 그러므로 주어진 급수는 절대 수렴한다.

8. (a) $\sum a_n$ 은 절대 수렴할 수 없다. 그러나 이 급수가 조건 수렴할지 또는 발산할지는 알 수 없다.

   (b) $\sum a_n$ 은 수렴하고 또한 절대 수렴한다.

9. (a) $\sum |a_n|$ 은 발산한다.

   (b) 어떠한 결론도 내릴 수 없다 (그림 8-5를 보면 수렴하는 급수에 대해 $\sum |a_n|$ 이 발산할 수도 있고 수렴할 수도 있다.)

10. (a) $1/n! \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. 절댓값의 급수는 $\sum 1/n!$ 이고 수렴한다. 따라서 (8.32) 에 의해 원래 주어진 급수는 수렴한다.

    (b) $1/\sqrt{n} \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. 절댓값의 급수는 $\sum 1/\sqrt{n}$ 이고 발산한다. 원래 주어진 급수에 대해서는 어떠한 결론도 내릴 수 없다.

11. (a) 수렴하는 등비급수의 공비는 $-1 < r < 1$을 만족한다. 절댓값으로 이루어진 급수의 공비는 $0 < r < 1$이다 (예를 들면 $r = -\frac{2}{3}$이면 절댓값의 급수는 $r = \frac{2}{3}$이다. 만일 $r = \frac{1}{7}$이면 절댓값의 급수는 $r = \frac{1}{7}$이다) 따라서 절댓값의 급수는 수렴하고 그러므로 원래 급수는 절대 수렴한다.

(b) p-급수는 양항급수이다. 절댓값의 급수도 원래 급수와 같다. 따라서 원래 급수는 절대 수렴한다.

8.6 멱급수

1.
$$\frac{|x^{n+1}\text{항}|}{|x^n\text{항}|} = \frac{|(n+2)x^{n+1}|}{|(n+1)x^n|} = \frac{n+2}{n+1}|x|$$
$n \to \infty$일 때 극한은 $|x|$이다. 수렴 구간은 $|x| < 1$, 즉 $-1 < x < 1$.

2.
$$\frac{|x^{n+1}\text{항}|}{|x^n\text{항}|} = \left|\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)^2}\right|\left|\frac{3^n n^2}{x^n}\right| = \frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x|$$
$n \to \infty$일 때 극한은 $\frac{1}{3}|x|$이다. 수렴 구간은 $\frac{1}{3}|x| < 1$, $|x| < 3$, 즉 $-3 < x < 3$.

3.
$$\frac{|x^{n+1}\text{항}|}{|x^n\text{항}|} = \frac{|(n+1)!x^{n+1}|}{|n!x^n|} = (n+1)|x|$$
$n \to \infty$일 때 극한은 ∞ ($x = 0$일 때만 제외). 급수는 $x = 0$일 때에만 수렴하고 수렴 반경은 0이다.

4.
$$\frac{|x^{n+1}\text{항}|}{|x^n\text{항}|} = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\left|\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{1}{n+1}|x|$$
$n \to \infty$일 때 극한은 0이다. 급수는 모든 x에 대해서 수렴한다. 즉, 수렴 구간은 $(-\infty, \infty)$.

5. 주어진 급수는 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$.
$$\frac{|x^{2n+3}\text{항}|}{|x^{2n+1}\text{항}|} = \frac{|x^{2n+3}|}{|x^{2n+1}|} = |x^2| = x^2$$
$n \to \infty$일 때 극한은 x^2이다. 수렴 구간은 $x^2 < 1$, 즉 $-1 < x < 1$.

6. 주어진 급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}x^{2n+1}$.
$$\frac{|x^{2n+3}\text{항}|}{|x^{2n+1}\text{항}|} = \frac{|2^{2n+2}x^{2n+3}|}{|2^{2n}x^{2n+1}|} = 2^2|x^2| = 4x^2$$
$n \to \infty$일 때 극한은 $4x^2$. 수렴 구간은 $4x^2 < 1$, 즉 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

7. 주어진 급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n/n$.
$$\frac{|x^{n+1}\text{항}|}{|x^n\text{항}|} = \left|\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{n+1}\right|\left|\frac{n}{3^n x^n}\right| = 3\frac{n}{n+1}|x|$$
$n \to \infty$일 때 극한은 $3|x|$. 수렴 구간은 $3|x| < 1$, 즉 $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

8.7 초등함수의 멱급수 표현

1. (a) $q = 1/3$ 인 이항급수 전개를 하면,

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(-2/3)}{2!}x^2 + \frac{1/3(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{3!}x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2 2!}x^2 + \frac{2\cdot 5}{3^3 3!}x^3 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4 4!}x^4 + \cdots \quad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x} = x \cdot \frac{1}{1-x} &= x\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) \quad (-1 < x < 1) \\ &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \quad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

(c) $q = -3$ 인 이항급수 전개를 하면,

$$\begin{aligned}(1+x)^{-3} &= 1 - 3x + \frac{(-3)(-4)}{2!}x^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - 3x + \frac{3\cdot 4}{2!}x^2 - \frac{3\cdot 4\cdot 5}{3!}x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

(d)

$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2(1-\frac{3}{2}x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}x}$$

$1/(1-x)$ 의 x 에 $\frac{3}{2}x$ 를 대신 대입하여 급수 전개를 하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}x} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + \cdots\right) \quad \left(-1 < \frac{3}{2}x < 1\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 + \frac{3^3}{2^4}x^3 + \cdots \quad \left(-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(3+x)^6} = \frac{1}{3^6(1+\frac{1}{3}x)^6} &= \frac{1}{3^6}\left(1 + \frac{1}{3}x\right)^{-6} \\ &= \frac{1}{3^6}\left(1 - 6\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{(-6)(-7)}{2!}\left(\frac{1}{3}x\right)^2 + \frac{(-6)(-7)(-8)}{3!}\left(\frac{1}{3}x\right)^3 + \cdots\right) \quad \left(-1 < \frac{1}{3}x < 1\right) \\ &= \frac{1}{3^6} - \frac{6}{3^7}x + \frac{6\cdot 7}{3^8 2!}x^2 - \frac{6\cdot 7\cdot 8}{3^9 3!}x^3 + \cdots \quad (-3 < x < 3)\end{aligned}$$

(f) (방법 1) 부분 분수 분해를 하면

$$\frac{x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-3x}$$

$1/(1-x)$ 의 급수 전개식을 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-3x} &= -\frac{1}{2}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(3^n - 1)x^n\end{aligned}$$

첫번째 항의 급수의 수렴 구간은 $-1 < x < 1$ 이고 두번째 항의 급수의 수렴 구간은 $-1 < 3x < 1$, 즉 $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ 이므로 두 급수의 합의 수렴 구간은 더 작은 $-\frac{1}{3}x < \frac{1}{3}x$ 이다.

(방법 2) $1/(1-x)$에 대한 급수 전개식과 $1/(1-3x)$에 대한 급수 전개식을 곱하고 다시 x를 곱한다.

(g)

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2(1-\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}$$

$1/(1-x)$의 x에 $\frac{1}{2}x$를 대신 대입하여 급수 전개를 하면

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}x} &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^3+\cdots\right) \quad (-1<\frac{1}{2}x<1)\\ &= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}x-\frac{1}{2^3}x^2-\cdots \quad (-2<x<2)\end{aligned}$$

(h) $\ln(2+x) = \ln 2[1+\frac{1}{2}x] = \ln 2 + \ln(1+\frac{1}{2}x)$. 식 (8.48)을 이용하면

$$\begin{aligned}\ln(2+x) &= \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x\right)^4 + \cdots \quad (-1<\frac{1}{2}x<1)\\ &= \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2\cdot 2}x^2 + \frac{1}{2^3\cdot 3}x^3 - \frac{1}{2^4\cdot 4}x^4 + \cdots \quad (-2<x<2)\end{aligned}$$

2. $q=\frac{1}{2}$인 이항급수 전개식에서 x 대신 $-3x^2$을 대입하면

$$\begin{aligned}\sqrt{1-3x^2} &= 1+\frac{1}{2}(-3x^2)+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}(-3x^2)^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}(-3x^2)^3+\cdots \quad (-1<-3x^2<1)\\ &= 1-\frac{3}{2}x^2-\frac{3^2}{2^2 2!}x^4-\frac{3^3\cdot 1\cdot 3}{2^3 3!}x^6-\frac{3^4\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^8+\cdots \quad (x^2<\frac{1}{3},\ -\sqrt{\frac{1}{3}}<x<\sqrt{\frac{1}{3}})\end{aligned}$$

x^{34}을 포함하는 항은 $-\dfrac{3^{17}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots 31}{2^{17}17!}x^{34}$이다. 급수를 합기호로 나타내면

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}(1+(-x^2))^{-1} &= 1+(-1)(-x^2)+\frac{(-1)(-2)}{2!}(-x^2)^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-x^2)^2+\cdots \quad (-1<-x^2<1)\\ &= 1+x^2+x^4+x^6+\cdots \quad (-1<x<1)\end{aligned}$$

(b) $1/(1-x)$의 등비급수 전개식에서 x 대신 x^2을 대입하면

$$\begin{aligned}(1+(-x^2))^{-1} &= 1+x^2+(x^2)^2+(x^2)^3+\cdots \quad (-1<x^2<1)\\ &= 1+x^2+x^4+x^6+\cdots \quad (-1<x<1)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(1+(-x^2))^{-1} &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1+x}\\ &= (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1-x+x^2-x^3+\cdots) \quad (-1<x<1)\\ &= 1+x^2+x^4+x^6+\cdots \quad (-1<x<1)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} &= \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \\
&= \frac{1}{2}(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) + \frac{1}{2}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\
&= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

(e) 긴 나눗셈을 하면

$$\begin{array}{rl}
 & 1 + x^2 + x^4 + \cdots \\
1 - x^2 & \overline{)\,1 \qquad\qquad\qquad} \\
 & \underline{1 - x^2} \\
 & \qquad x^2 \\
 & \qquad \underline{x^2 - x^4} \\
 & \qquad\qquad x^4 \ \text{등등}
\end{array}$$

그러므로 $1/(1-x^2) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots$. 이미 알려져 있는 급수로부터 얻어진 것이 아니므로 수렴 구간이 바로 주어지지 않고 비율 판정법을 이용하여 $(-1, 1)$ 임을 찾아야 한다.

4. (a)

$$\begin{aligned}
(1 + (-x))^{-2} &= 1 - 2(-x) + \frac{(-2)(-3)}{2!}(-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}(-x)^3 + \cdots \quad (-1 < -x < 1) \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x} &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \quad (-1 < x < 1) \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

5. (a) $1/(1-x)$의 전개식에서 x 대신 $-x^2$을 대입하여 먼저 $1/(1+x^2)$의 급수 전개식을 구하면 $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ $(-1 < x < 1)$이다. 양변의 역미분을 수행하면 $\tan^{-1} x = C + x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots$ $(-1 < x < 1)$이고 $x = 0$으로 두면 $C = 0$이다. 따라서

$$\tan^{-1} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

(b) (a)의 결과에서 x 대신 x^2을 대입하면

$$\tan^{-1} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7} + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

이다. 그러므로 양변을 0에서 1/2까지 적분하면

$$\int_0^{1/2} \tan^{-1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{1/2} - \frac{x^7}{3 \cdot 7}\bigg|_0^{1/2} + \frac{x^{11}}{5 \cdot 11}\bigg|_0^{1/2} - \cdots = \frac{1}{24} - \frac{1}{(21)(128)} + \cdots$$

세 번째 항부터 0.0001보다 작아지므로 첫 두 항의 합인 $\frac{111}{2688}$을 추정값으로 사용한다. 추정값에서 마지막 항은 뺀 값이기 때문에 실제 합보다 추정값이 적다.

6. 주어진 급수는 $1+x+x^2+x^3+\cdots$ 를 미분하고 x를 곱하면 얻을 수 있으므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots\\ \frac{1}{(1-x)^2} &= 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\\ \frac{x}{(1-x)^2} &= x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\end{aligned}$$

7. (a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^{n-1}}x^n$

   (b) $f'(x)=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\cdots$

   (c) $f'(x)$는 $r=\frac{1}{2}x$인 등비급수이므로 $-1<\frac{1}{2}x<1$이면 $1/(1-\frac{1}{2}x)$로 수렴한다. 즉 $f'(x)$는 함수 $1/(1-\frac{1}{2}x)$이다. $f(x)$는 $f'(x)$의 역도함수이므로 $f(x)=-2\ln(1-\frac{1}{2}x)+C$이고 $x=0$으로 두면 $C=0$이다. 따라서 $f(x)=-2\ln(1-\frac{1}{2}x)$이다.

8. (a)

$$4\left(1+\frac{3}{16}\right)^{1/2}=4\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{16}\right)^2/2!\right)+\cdots=4+4(0.09375)-4(0.0043945)+\cdots$$

   교대급수이고 네 번째 항은 0.01보다 작다. 그러므로 첫 세 항의 합을 추정값으로 사용한다.

   (b) 이항급수는 $-1<x<1$에 대해 수렴한다. 따라서 $x=18$로 이항급수를 사용할 수 없다. 참고로 (a)에서 $x=\frac{3}{16}$이었고 이 값은 -1과 1 사이의 값이다.

8.8 매클로린 급수

1.

$$\begin{aligned}f(x) &= (1+x)^q\\ f'(x) &= q(1+x)^{q-1}\\ f''(x) &= (q-1)q(1+x)^{q-2}\\ f'''(x) &= (q-2)(q-1)q(1+x)^{q-3}\\ &\vdots\end{aligned}$$

그러므로 $f(0)=1$, $f'(0)=q$, $f''(0)=q(q-1)$, $f'''(0)=q(q-1)(q-2)$, $\cdots$ 이다. 따라서 매클로린 급수는

$$(1+x)^q=1+qx+\frac{q(q-1)}{2!}x^2+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3+\cdots$$

이고 이항급수 전개식과 일치한다.

2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ f'''(x) &= \frac{3\cdot 2}{(1-x)^4} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{4!}{(1-x)^5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

그러므로 $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 3!$, $f^{(4)}(0) = 4!, \cdots$ 이다. 따라서 매클로린 급수는

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

로 등비급수 전개, 식 (8.39) 와 일치한다.

$f(x) = \ln(1+x)$ 라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{3\cdot 2}{(1+x)^4} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{4!}{(1+x)^5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

그러므로 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = -3!$, $f^{(5)}(0) = 4!, \cdots$ 이다. 따라서 매클로린 급수는

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

로 식 (8.48)과 일치한다. 두 경우 모두 수렴 구간은 비율 판정법을 이용하여 찾아야 한다.

3. (a) (방법 1) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 라고 하면, $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cdots$. 그러므로 $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 1, \cdots$ 이고 매클로린 급수는 $x + x^3/3! + x^5/5! + \cdots$ 이다. 수렴 구간 $(-\infty, \infty)$ 를 찾기 위해서는 비율 판정법을 사용해야 한 다.

(방법 2) 모든 x 에 대해 $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$ 이므로 모든 x 에 대해 $e^{-x} = 1 + (-x) + (-x)^2/2! + (-x)^3/3! + \cdots = 1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \cdots$ 이다. 급수끼리 서로 빼면 모든 x 에 대해 $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}(2x + 2x^3/3! + 2x^5/5! + \cdots) = x + x^3/3! + x^5/5! + \cdots$

(b) (방법 1) $f(x) = \dfrac{1}{3-2x}$ 라고 하면, $f'(x) = \dfrac{2}{(3-2x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2^2\cdot 2}{(3-2x)^3}$, $f'''(x) =$

$\dfrac{2^3\cdot 3!}{(3-2x)^4}$, $f^{(4)}(x)=\dfrac{2^4\cdot 4!}{(3-2x)^5}, \cdots$. 그러므로 $f(0)=\frac{1}{3}$, $f'(0)=2/3^2$, $f''(0)=2^2\cdot 2/3^3$, $f'''(0)=2^3\cdot 3!/3^4$, $f^{(4)}(0)=2^4\cdot 4!/3^5, \cdots$ 이고 매클로린 급수는 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}x+\frac{2^2\cdot 2}{3^3}\frac{x^2}{2!}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^4}\frac{x^3}{3!}+\cdots=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}x+\frac{2^2}{3^3}x^2+\frac{2^3}{3^4}x^3+\cdots$. 수렴 구간 $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$를 찾기 위해서는 비율 판정법을 사용해야 한다.

(방법 2) $\dfrac{1}{3-2x}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}x}=\frac{1}{3}(1+\frac{2}{3}x+(\frac{2}{3}x)^2+(\frac{2}{3}x)^3+\cdots),\ -1<\frac{2}{3}x<1.$

4.

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

5. (a) 식 (8.53)에 의해

$$\begin{aligned}\cos 3x&=1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\frac{(3x)^6}{6!}+\cdots\quad(-\infty<3x<\infty)\\&=1-\frac{3^2}{2!}x^2+\frac{3^4}{4!}x^4-\frac{3^6}{6!}x^6+\cdots\quad\forall x\end{aligned}$$

(b) 식 (8.52)에 의해

$$x^3\sin x=x^3\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)=x^4-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{5!}-\cdots\quad\forall x$$

(c) 식 (8.54)에 의해

$$e^{4x}=1+(4x)+\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^3}{3!}+\cdots=1+4x+\frac{4^2}{2!}x^2+\frac{4^3}{3!}x^3+\cdots\quad\forall x$$

6.

$$\begin{aligned}\sin^2 x&=\frac{1-\cos 2x}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\left[1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots\right]\right)\\&=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\cdots\quad\forall x\end{aligned}$$

7. $f''(x)=g'(x)=f(x)$, $f'''(x)=f'(x)=g(x)$, $f^{(4)}(x)=g'(x)=f(x), \cdots$ 이므로 $f(0)=1$, $f'(0)=g(0)=0$, $f''(0)=f(0)=1$, $f'''(0)=g(0)=0$, $f^{(4)}(0)=1, \cdots$ 이고 매클로린 급수는 $1+x^2/2!+x^4/4!+x^6/6!+\cdots$ 이다. 비율 판정법을 이용하여 수렴 구간을 구한다.

$$\frac{|x^{2n+2}\text{항}|}{|x^{2n}\text{항}|}=\frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{|x^{2n}|}=\frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$n\to\infty$ 일 때 극한은 0 이므로 급수는 모든 x에 대해 수렴한다.

8.

$$\sin(-x)=(-x)-(-x)^3/3!+(-x)^5/5!-\cdots=-x+x^3/3!-x^5/5!+\cdots=-\sin x$$

9. $e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$ 를 미분하면 $\frac{d}{dx}e^x=0+1+2x/2!+3x^2/3!+4x^3/4!+\cdots=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots=e^x$ 가 된다. 즉 $(e^x)'=e^x$ 이다.

10. $\sin 1 = 1 - 1/3! + 1/5! - 1/7! + \cdots$ 이다. 처음으로 0.0001보다 작아지는 항은 $1/9!$ 이므로 처음 네 개항까지의 합을 추정값으로 사용하고 이 값은 맨 마지막 항 $1/7!$ 이 뺄셈이므로 실제 값보다 작게 추정된 값이다.

11. (a) e^x 의 급수 전개에서 x 대신 $-x^2$ 을 대입하여 얻는 전개식을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx &= \int_0^1 (1 - x^2 + x^4/2! - x^6/3! + \cdots)dx \\ &= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{5\cdot 2!}\Big|_0^1 - \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \cdots\end{aligned}$$

교대 급수에서 네 번째 항이 처음으로 0.1보다 작은 수가 되므로 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$ 을 추정값으로 사용한다.

(b) $q = -4$ 인 이항급수 전개식에서 x 대신 x^2 을 대입하여 얻는 전개식을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{1/3} \frac{1}{(1+x^2)^4}dx &= \int_0^{1/3}\left(1 - 4x^2 + \frac{(-4)(-5)}{2!}x^4 + \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!}x^6 + \cdots\right)dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{20}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \cdots\end{aligned}$$

교대 급수이고 처음으로 0.01보다 작은 항은 세 번째 항이므로 첫 두 항의 합을 추정값으로 사용한다.

12. (a) 식 (8.48) 을 이용하면

$$\ln(1+x^2) = x^2 - (x^2)^2/2 + (x^2)^3/3 - \cdots = x^2 - x^4/2 + x^6/3 - x^8/4 + \cdots$$

식 (8.53) 을 이용하면

$$1 - \cos x = x^2/2! - x^4/4! + x^6/6! - \cdots$$

그러므로

$$\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} = \frac{x^2 - x^4/2 + x^6/3 - x^8/4 + \cdots}{x^2/2! - x^4/4! + x^6/6! - \cdots} = \frac{1 - x^2/2 + x^4/3}{1/2! - x^2/4! + x^4/6! - \cdots}$$

이고 $x \to \infty$ 일 때 극한은 $1/(1/2!)) = 2$.

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots}{x} = \lim_{x\to 0}(1 - x^2/3! + x^4/5! - \cdots) = 1$$

13. 식 (8.49) 에 의해 모든 x 에 대해 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. $x = 1$ 로 두면 $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$. 즉 답은 e.

8.9 테일러의 나머지 공식과 e 의 근삿값

8.10 테일러 급수

1. 비율 판정법을 사용하면

$$\left|\frac{(x-4)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\right|\left|\frac{n3^n}{(x-4)^n}\right| = \frac{1}{3}\frac{n}{n+1}|x-4|$$

$n \to \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{3}|x-4|$. 수렴 구간은 $\frac{1}{3}|x-4| < 1$, $-3 < x-4 < 3$, $1 < x < 7$.

2. (a) 주어진 함수는 $x = -8$ 에서 발산하고 -8 근방으로는 전개할 수 없다. 즉 $x-(-8)$, $x+8$ 의 멱급수로는 전개할 수 없다.

   (b) $\ln x$ 는 $x = 0$ 에서 발산하고 $x < 0$ 에 대해서는 정의할 수 없다. 그러므로 0 근방이나 어떠한 음수 근방에서는 멱급수로 전개할 수 없다. 예를 들면 $x, x+1, x+2, x+\frac{1}{2}, x+\pi$ 등의 멱급수로는 전개할 수 없다.

3. (a) (방법 1) $\ln x = \ln((x-1)+1)$ 이므로 $u = x-1$ 로 두면 $-1 < u < 1$ 에 대해

$$\begin{aligned}\ln((x-1)+1) &= \ln(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 - u^4/4 + \cdots \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots \quad (0 < x < 2)\end{aligned}$$

   (방법 2) $f(x) = \ln x$ 이면 $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, $f'''(x) = 2/x^3$, $f^{(4)}(x) = -3!/x^4$, $\cdots$ 이므로 $f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2, f^{(4)}(1) = -3!, \cdots$ 이다. 식 (8.60)을 이용하면 $(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + \cdots$ 이고 정리하면 (방법 1)에서 얻어낸 급수와 동일하다. 수렴 구간은 비율 판정법을 이용하여 구해야 한다.

   (b)

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin((x-\pi)+\pi) \quad (u = x-\pi) \\ &= \sin(u+\pi) = \sin u \cos\pi + \cos u \sin\pi = -\sin u \\ &= -(u - u^3/3! + u^5/5! - \cdots), \quad \forall u \\ &= -(x-\pi) + (x-\pi)^2/3! - (x-\pi)^5/5! + \cdots, \quad \forall x\end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned}e^x &= e^{(x-1)+1} \quad (u = x-1) \\ &= e^{u+1} = ee^u \\ &= e(1 + u + u^2/2! + u^3/3! + \cdots), \quad \forall u \\ &= e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots, \quad \forall x\end{aligned}$$

   (d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{-6-x} &= \frac{1}{-5-(x+1)} \quad (u = x+1) \\ &= -\frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{5}u} \quad (\text{등비급수 사용}) \\ &= -\frac{1}{5}\left(1 + \left(-\frac{1}{5}u\right) + \left(-\frac{1}{5}u\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}u\right)^3 + \cdots\right), \quad -1 < -\frac{1}{5}u < 1 \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{u}{5^2} - \frac{u^2}{5^3} + \frac{u^3}{5^4} - \cdots, \quad -5 < u < 5 \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{x+1}{5^2} - \frac{(x+1)^2}{5^3} + \frac{(x+1)^3}{5^4} - \cdots, \quad -6 < x < 4\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{(x+2)-2} \quad (u = x+2)\\ &= \frac{1}{u-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}u} \quad (\text{등비급수 사용})\\ &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}u+\left(\frac{1}{2}u\right)^2+\left(\frac{1}{2}u\right)^3+\cdots\right), \quad -1 < -\frac{1}{2}u < 1, -2 < u < 2\\ &= -\frac{1}{2}-\frac{x+2}{2^2}-\frac{(x+2)^2}{2^3}-\frac{(x+2)^3}{2^4}-\cdots, \quad -2 < x+2 < 2, -4 < x < 0\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= \sqrt{(x-9)+9} \quad (u = x-9)\\ &= \sqrt{u+9} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}u} \quad (\text{이항급수 사용})\\ &= 3\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}u\right)+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}\left(\frac{1}{9}u\right)^2+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}\left(\frac{1}{9}u\right)^3+\cdots\right), \quad -1 < \frac{1}{9}u < 1, -9 < u < 9\\ &= 3+\frac{1}{2\cdot 3}(x-9)-\frac{1}{3^3 2^2 2!}(x-9)^2+\frac{3}{3^5 2^3 3!}(x-9)^3-\frac{3\cdot 5}{3^7 2^4 4!}(x-9)^4+\cdots, \quad 0 < x < 18\end{aligned}$$

$(x-9)^{50}$ 의 계수는 $-\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdots 97}{3^{99}2^{50}50!}$ 이다.

(g) (방법 1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+8)^5} &= \frac{1}{((x-1)+9)^5} \quad (u = x-1)\\ &= \frac{1}{(u+9)^5} = \frac{1}{9^5}\left(1+\frac{1}{9}u\right)^{-5} \quad (\text{이항급수 사용})\\ &= \frac{1}{9^5}\left(1-5\left(\frac{1}{9}u\right)+\frac{(-5)(-6)}{2!}\left(\frac{1}{9}u\right)^2+\frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}\left(\frac{1}{9}u\right)^3+\cdots\right), \quad -1 < \frac{1}{9}u < 1\\ &= \frac{1}{9^5}-\frac{5}{9^6}(x-1)+\frac{5\cdot 6}{9^7 2!}(x-1)^2-\cdots, \quad -8 < x < 10\end{aligned}$$

$(x-1)^{19}$ 의 계수는 $-\dfrac{5\cdots 6\cdot 7\cdots 23}{9^{24}19!}$ 이다.

(방법 2)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{(x+8)^5}\\ f'(x) &= \frac{-5}{(x+8)^6}\\ f''(x) &= \frac{5\cdot 6}{(x+8)^7}\\ f'''(x) &= \frac{-5\cdot 6\cdot 7}{(x+8)^8}\\ &\vdots\end{aligned}$$

따라서 $f(1) = 1/9^5$, $f'(1) = -5/9^6$, $f''(1) = 5\cdot 6/9^7$, $f'''(1) = -5\cdot 6\cdot 7/9^8$, $\cdots$ 이고 급수는

$$\frac{1}{9^5}-\frac{5}{9^6}(x-1)+\frac{5\cdot 6}{9^7 2!}(x-1)^2-\frac{5\cdot 6\cdot 7}{9^8 3!}(x-1)^3+\cdots$$

수렴 구간은 비율 판정법을 이용하면 $(-8, 10)$ 을 얻는다.

(h)

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos 2\left((x+\tfrac{1}{2}\pi)-\tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos(2(x+\tfrac{1}{2}\pi)-\pi)\\ &= \cos 2(x+\tfrac{1}{2}\pi)\cos\pi + \sin 2(x+\tfrac{1}{2}\pi)\sin\pi = -\cos 2(x+\tfrac{1}{2}\pi) \quad (u = 2(x+\tfrac{1}{2}\pi))\\ &= -(1-u^2/2!+u^4/4!-u^6/6!+u^8/8!-\cdots), \quad \forall u\\ &= -1+\frac{2^2}{2!}(x+\tfrac{1}{2}\pi)^2-\frac{2^4}{4!}(x+\tfrac{1}{2}\pi)^4+\frac{2^6}{6!}(x+\tfrac{1}{2}\pi)^6-\cdots, \quad \forall x\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}\ln 3x &= \ln 3+\ln(2+(x-2)) = \ln 3+\ln 2+\ln(1+\tfrac{1}{2}(x-2)) = \ln 6+\ln(1+\tfrac{1}{2}(x-2)) \quad (u=\tfrac{1}{2}(x-2))\\ &= \ln 6+u-u^2/2+u^3/3-u^4/4+\cdots, \quad -1<u<1\\ &= \ln 6+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^2\cdot 2}(x-2)^2+\frac{1}{2^3\cdot 3}(x-2)^3-\frac{1}{2^4\cdot 4}(x-2)^4+\cdots, \quad 0<x<4\end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2x} &= \frac{1}{-7+2(x+4)} = -\frac{1}{7}\frac{1}{1-\frac{2}{7}(x+4)} \quad (u=\tfrac{2}{7}(x+4))\\ &= -\frac{1}{7}(1+u+u^2+u^3+u^4+\cdots), \quad -1<u<1\\ &= -\frac{1}{7}-\frac{2}{7^2}(x+4)-\frac{2^2}{7^3}(x+4)^2-\frac{2^3}{7^4}(x+4)^3-\cdots, \quad -\tfrac{15}{2}<x<-\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$