7장 역미분
연습문제 해답

7.1 개요

7.2 치환적분법

1. $u = x^2$ 이라고 하면, $du = 2xdx$ 이고 그러면 $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

2. $u = 3x^2+7$ 이라고 하면, $du = 6xdx$ 이고 그러면 $\frac{1}{6}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C = \frac{1}{9}(3x^2+7)^{3/2}+C$

3. $u = 3+5x$ 라고 하면, $du = 5dx$ 이고 그러면 $\frac{1}{5}\int\sqrt{u}du = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{15}(3+5x)^{3/2} + C$

4. $u = 3+7x$ 라고 하면, $du = 7dx$ 이고 그러면 $\frac{1}{7}\int 1/\sqrt{u}du = \frac{2}{7}\sqrt{u} + C = \frac{2}{7}\sqrt{3+7x} + C$

5. $u = \tan x$ 라고 하면, $du = \sec^2 xdx$ 이고 그러면 $\int u^{14}du = \frac{1}{15}u^{15} + C = \frac{1}{15}\tan^{15}x + C$

6. $u = x+1$ 이라고 하면, $du = dx$ 이고 $x = u-1$ 이다. 그러면 $\int(u-2)/u^5 du = \int(u^{-4}-2u^{-5})du = \dfrac{u^{-3}}{-3} - 2\dfrac{u^{-4}}{-4} + C = -\dfrac{1}{3(x+1)^3} + \dfrac{1}{2(x+1)^4} + C$

7. $u = 1+2\sec\theta$ 라고 하면, $du = 2\sec\theta\tan\theta d\theta$ 이다. 그러면 $\int = \frac{1}{2}\int 1/\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\cdot 2u^{1/2} + C = \sqrt{1+2\sec\theta} + C$

8. $u = \ln x$ 라고 하면, $du = 1/xdx$ 이다. 그러면 $\int 1/udu = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$

9. $u = x^2$ 이라고 하면, $du = 2xdx$ 이다. 그러면 $\int x^3\sin udu/2x = \frac{1}{2}\int x^2\sin udu = \frac{1}{2}\int u\sin udu = \frac{1}{2}(\sin u - u\cos u) + C = \frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2\cos x^2) + C$

10. $u = 1+3x$ 라고 하면, $du = dx$ 이다. 그러면 $\frac{1}{3}\int u^7 du = \frac{1}{24}u^8 + C = \frac{1}{24}(1+3x)^8 + C$

11. $u = 2-3x$ 라고 하면, $du = -3dx$ 이다. 그러면 $-\frac{1}{3}\int 1/udu = -\frac{1}{3}\ln|u|+C = -\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C$

12. $u = 2-x$ 라고 하면, $du = -dx$ 이다. 그러면 $-\int 1/u^3du = 1/2u^2 + C = \frac{1}{2(2-x)^2} + C$

13. $u = \frac{1}{2}\theta - 1$ 이라고 하면, $du = \frac{1}{2}d\theta$ 이다. 그러면 $2\int\cos udu = 2\sin u + C = 2\sin(\frac{1}{2}\theta - 1) + C$

14. $u = -x$ 이라고 하면 $du = -dx$ 이다. 그러면 $\int(-u)e^u\cdot(-du) = \int ue^u du = e^u(u-1) + C$ (공식 61) $= e^{-x}(-x-1) + C$

15. $u = \cos x$ 라고 하면, $du = -\sin xdx$ 이다. 그러면 $-\int u^3du = -\frac{1}{4}u^4 + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

16. $u=-x$ 라고 하면 $du=-dx$ 이다. 그러면 $-\int e^u du=-e^u+C=-e^{-x}+C$

17. $u=3x$ 라고 하면, $du=3dx$ 이다. 그러면 $\int \frac{1}{3}\sin u \cdot \frac{1}{3}du=\frac{1}{9}\int u\sin u du=\frac{1}{9}(\sin u-u\cos u)+C$ (공식 48) $=\frac{1}{9}(\sin 3x-3x\cos 3x)+C$

18. $u=\pi x$ 라고 하면, $du=\pi dx$ 이다. 그러면 $(1/\pi)\int \sin^2 u du=(1/\pi)\frac{1}{2}(u-\sin u\cos u)+C$ (공식 39) $=(1/2\pi)(\pi x-\sin\pi x\cos\pi x)+C$

19. $3\int x\sin x dx=3(\sin x-x\cos x)+C$ (공식 48)

20. $x=3x$ 라고 하면, $du=3dx$ 이다. 그러면 $\int (\frac{1}{3}u)^2\cos u\cdot\frac{1}{3}du=\frac{1}{27}\int u^2\cos u du$ (공식 51) $=\frac{1}{27}[(u^2-2)\sin u+2u\cos u]+C=\frac{1}{27}(9x^2-2)\sin 3x+\frac{6}{27}\cos 3x+C$

21. $u=2x+3$ 라고 하면, $du=2dx$ 이다. 그러면 $\frac{1}{2}\int \ln u du=\frac{1}{2}(u\ln u-u)+C$ (공식 62) $=\frac{1}{2}(2x+3)\ln(2x+3)-\frac{1}{2}(2x+3)+C$

22. $\int \sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$ (공식 33)

23. 맞지 않다. 첫 번째 단계는 문제가 없으나 두 번째 단계에서는 $u=\sqrt{3}x$ 로 놓으면 $du=\sqrt{3}dx$ 이고, 그러면

$$\int \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2}dx=\int\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\sqrt{3}x+C$$

24. (a) $u=3x$ 라고 하면, $du=3dx$ 이다. 그러면 $\frac{1}{3}\int\tan^{-1}u du=\frac{1}{3}(u\tan^1 u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2))+C$ (공식 59) $=x\tan^{-1}3x-\frac{1}{6}\ln(1+9x^2)+C$

    (b) 아직은 역도함수를 구하는 것이 불가능하다.

25. $u=\cos x$ 라고 하면, $du=-\sin x dx$ 이다. 그러면 $-\int 1/u du=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C$

26.
$$\int \sec x dx=\int\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx=\int\frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$$
이제 $u=\sec x+\tan x$ 라고 하면, $du=(\sec x\tan x+\sec^2 x)dx$ 이다. 그러면 $\int du/u=\ln|u|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C$

27. $\int\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

7.3 적분표를 이용한 역미분 I

1. $2+6x-x^2=-(x^2-6x-2)=-([x-3]^3-11)=11-(x-3)^2$. $u=x-3$ 이라 하면, $du=dx$ 이다. 그러면
$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+6x-x^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{11-u^2}}=\sin^{-1}\frac{u}{\sqrt{11}}+C=\sin^{-1}\frac{x-3}{\sqrt{11}}+C$$

2. $x+2x^2=2([x+\frac{1}{4}]^2-\frac{1}{16})$. $u=x+\frac{1}{4}$ 라 하면, $du=dx$ 이다. 그러면
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-\frac{1}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}}\right|+C$$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{5}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\dfrac{5}{3}}\right| + C$ (공식 27)

4.

$$\int\left(x^2-4+\frac{2x+16}{x^2+4}\right)dx \text{ (긴 나눗셈) } = \frac{x^3}{3}-4x+2\int\frac{x}{x^2+4}dx+16\int\frac{1}{x^2+4}dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3-4x+\ln(x^2+4)+8\tan^{-1}\frac{1}{2}x+C$$

5. $\int x\sqrt{(x+1)^2-1}dx$. $u=x+1$ 이라고 하면, $du=dx$ 이다.

$$\int(u-1)\sqrt{u^2-1}du = \int u\sqrt{u^2-1}du - \int\sqrt{u^2-1}du$$
$$= \frac{1}{3}(u^2-1)^{3/2} - \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| + C$$
$$= \frac{1}{3}(x^2+2x)^{3/2} - \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x} + \frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right| + C$$

6. 세 가지 방법으로 생각해 볼 수 있다.

- $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2x+6}\right) = \frac{1}{2}x - 3\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+6| + C$
- $a=6, b=2$ 로 두고 공식 5를 사용하면 $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\ln|2x+6|+C = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}\ln|2x+6|+K$
- $u=2x+6$ 이라고 하면, $du=2dx$ 이다. 그러면 $\int\frac{1}{2}(u-6)/u(du/2) = \frac{1}{4}\int(1-6/u)du = \frac{1}{4}u-\frac{3}{2}\ln|u|+C = \frac{1}{4}(2x+6)-\frac{3}{2}\ln|2x+6|+C$

7. $\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x-\tan^{-1}x+C$

7.4 적분표를 이용한 역미분 II

1. (a) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x+1}+\dfrac{E}{2x+3}$

   (b) x^2+2x-1 는 $(x-[-1+\sqrt{3}]))(x-[-1+\sqrt{3}])$ 으로 인수분해 되지만, x^2-2x+2 는 $b^2-4ac<0$ 이므로 인수분해가 되지 않는다. 따라서

$$\frac{A}{x-(-1+\sqrt{3})}+\frac{B}{x-(-1-\sqrt{3})}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

2. (a) $\dfrac{12}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} = \dfrac{A}{x+\sqrt{3}}+\dfrac{B}{x-\sqrt{3}}$ 로 두면 $12 = A(x-\sqrt{3})+B(x+\sqrt{3})$ 이다. $x=\sqrt{3}$ 이면 $12=2\sqrt{3}B$ 로부터 $B=6/\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ 이다. $x=-\sqrt{3}$ 이면 $12=-2\sqrt{3}A$ 로부터 $A=-2\sqrt{3}$ 이다. 따라서 부분분수분해는 $\dfrac{-2\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$.

   (b) $\dfrac{1}{(x-4)(2x+3)} = \dfrac{A}{x-4}+\dfrac{B}{2x+3}$ 로 두면 $1=A(2x+3)+B(x-4)$ 이다. $x=4$ 이면 $1=11A$ 로부터 $A=1/11$ 이다. $x=-3/2$ 이면 $1=-\frac{11}{2}B$ 로부터 $B=-2/11$ 이다. 따라서 부분분수분해는 $\dfrac{1/11}{x-4}-\dfrac{2/11}{2x+3}$

   (c) $\dfrac{5x}{(x^2+1)(x-2)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x-2}$ 로 두면 $5x=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+1)$ 이다. $x=2$ 이면 $10=5C$ 로부터 $C=2$ 이다. x^2 의 계수를 서로 같게 두면 $0=A+C$ 로부터 $A=-2$

이다. x의 계수를 서로 같게 두면 $5 = B - 2A$로부터 $B = 1$이다. 따라서 부분분수분해는 $\dfrac{-2x+1}{x^2+1} + \dfrac{2}{x-2}$.

(d) $\dfrac{2x+3}{(x-2)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-2)^2}$로 두면 $2x+3 = A(x-2)+B$이다. $x = 2$이면 $7 = B$이다. x의 계수를 서로 같게 두면 $2 = A$이다. 따라서 부분분수분해는 $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{7}{(x-2)^2}$

3. (a) $\dfrac{3}{(2-x)(x+1)} = \dfrac{A}{2-x} + \dfrac{B}{x+1}$로 두면 $3 = A(x+1)+B(2-x)$이다. $x = 2$이면 $3 = 3A$로부터 $A = 1$이다. $x = -1$이면 $3 = 3B$로부터 $B = 1$이다. 따라서 부분분수분해는 $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{1+x}$이다. 역도함수는 $-\ln|2-x| + \ln|x+1| + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{3dx}{-x^2+x+2}$에 대해 $a = -1, b = 1, c = 2$로 보고 공식 1(a)를 사용하면 역도함수는 $\ln\left|\dfrac{-2x+1-3}{-2x+1+3}\right| + C = \ln\left|\dfrac{-x-1}{2-x}\right| + C = \ln\dfrac{|x+1|}{|2-x|} + C = \ln|x+1| - \ln|2-x| + C$

4. (a) 주어진 식을 $2\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2-4x+4} + 3\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$와 같이 쓸 수 있고 공식 2와 공식 1(c)를 사용하거나 (문제 2(d)와 같이) $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{7}{(x-2)^2}$로 부분분수분해할 수 있다. 그러므로 역도함수는 $2\ln|x-2| - 7/(x-2) + C$

(b) $\dfrac{8x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \dfrac{8x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$로 두면 $8x = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$이다. $x = 1$이면 $8 = 4B$로부터 $B = 2$다. $x = -1$이면 $-8 = -4A$로부터 $A = 2$다. x^3의 계수를 비교하면 $0 = A+B+C$로부터 $C = -4$이다. x^2의 계수를 비교하면 $0 = -A+B+D$로부터 $D = 0$이다. 따라서 부분분수분해는 $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{4x}{x^2+1}$이다. 그러므로 역도함수는 $2\ln|x+1| + 2\ln|x-1| - 2\ln(x^2+1) + C$

(c) 공식 10을 사용하거나 $\dfrac{-2/9}{x} - \dfrac{1/3}{x^2} + \dfrac{4/9}{2x-3}$로 부분분수분해한다. 따라서 역도함수는 $-\frac{2}{9}\ln|x| + \frac{1}{3x} + \frac{2}{9}\ln|2x-3| + C$

5. $\dfrac{1}{x(a+bx)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{a+bx} + \dfrac{C}{(a+bx)^2}$로 두면, $1 = A(a+bx)^2 + Bx(a+bx) + Cx$이다. $x = 0$이면 $1 = a^2A$로부터 $A = 1/a^2$이다. $x = -a/b$이면 $1 = -(a/b)C$로부터 $C = -b/a$이다. x^2의 계수를 비교하면 $0 = b^2A + bB$로부터 $B = -b/a^2$이다. 따라서 주어진 적분은

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{x}dx - \frac{b}{a^2}\int \frac{1}{a+bx}dx - \frac{b}{a}\int \frac{1}{(a+bx)^2}dx$$

이고 역도함수는

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\ln|x| - \frac{1}{a^2}\ln|a+bx| + \frac{1}{a}\frac{1}{a+bx} + C &= -\frac{1}{a^2}(\ln|a+bx| - \ln|x|) + \frac{1}{a(a+bx)} + C \\ &= -\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + \frac{1}{a(a+bx)} + C \end{aligned}$$

6. 긴 나눗셈을 하면 $\dfrac{x^2}{x^2+5x+4} = 1 - \dfrac{5x+4}{x^2+5x+4}$이므로 주어진 적분은

$$\int \frac{x^2}{x^2+5x+4}dx = \int dx - 5\int \frac{xdx}{x^2+5x+4} - 4\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$$

첫 번째 적분은 x 이고, 두 번째 적분은 $a = 1, b = 5, c = 4$ 로 두고 공식 2를 사용하거나 분모를 인수분해하고 부분분수분해를 하여 역도함수를 구하면

$$-5 \cdot \frac{1}{2} \ln|x^2 + 5x + 4| + \frac{5 \cdot 5}{2} \int \frac{1}{x^2 + 5x + 4} dx$$

이다. 이것에 첫 번째 적분 결과와 세 번째 항을 더하면

$$\begin{aligned}
& x - \frac{5}{2} \ln|x^2 + 5x + 4| + \frac{17}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 4} \\
&= x - \frac{5}{2} \ln|x^2 + 5x + 4| + \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{3} \ln\left|\frac{2x + 5 - 3}{2x + 5 + 3}\right| \\
&= x - \frac{5}{2} \ln|x^2 + 5x + 4| + \frac{17}{6} \ln\left|\frac{x + 1}{x + 4}\right| \\
&= x - \frac{5}{2} \ln|x + 4||x + 1| + \frac{17}{6} \ln\left|\frac{x + 1}{x + 4}\right| \\
&= x - \frac{5}{2} \ln|x + 4| - \frac{5}{2} \ln|x + 1| + \frac{17}{6} \ln|x + 1| - \frac{17}{6} \ln|x + 4| \\
&= x + \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{16}{3} \ln|x + 4|
\end{aligned}$$

7.5 부분적분법

1. (a) $u = x, dv = e^x dx$ 라고 두면, $du = dx, v = e^x$ 이고 $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

   (b) $u = \tan^{-1} x, dv = dx$ 라고 두면, $du = dx/(1 + x^2), v = x$ 이고 $\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int x/(1 + x^2) dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

   (c) $u = \sin^{-1} x, dv = dx$ 라고 두면, $du = dx/\sqrt{1 - x^2}, v = x$ 이고 $\int \sin^{-1} dx = x \sin^{-1} x - \int x/\sqrt{1 - x^2} dx = x \sin^1 x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

   (d) $u = \ln x, dv = dx$ 라고 두면, $du = dx/x, v = x$ 이고 $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

2. (a) $u = \cos(\ln x), dv = dx$ 라고 두면, $du = -\sin(\ln x) \cdot (1/x) dx, v = x$ 이고 $\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$ 이다. 이제 $u = \sin(\ln x), dv = dx$ 라고 두면 $du = \cos(\ln x) \cdot (1/x) dx, v = x$ 이고 $\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$ 이다. 항들을 모아서 정리하면 $2 \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$ 이고 따라서

   $$\int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2} x[\cos(\ln x) + x \sin(\ln x)] + C$$

   (b) $u = x^2, dv = e^x dx$ 라고 두면, $du = 2x dx, v = e^x$ 이고 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x dx$ 이다. 이제 공식 61을 사용하거나 다시 부분적분을 이용하면 $u = x, dv = e^x dx$ 로 두고 $du = dx, v = e^x$ 이므로

   $$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

(c) $u=\tan^{-1}x, dv=xdx$ 라고 두면, $du=dx/(1+x^2), v=\frac{1}{2}x^2$ 이고

$$\begin{aligned}\int x\tan^{-1}xdx &= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C\end{aligned}$$

3. $u=\sec x, dv=\sec^2 xdx$ 라고 두면 $du=\sec x\tan xdx, v=\tan x$ 이다.

$$\begin{aligned}\int\sec^3 xdx &= \sec x\tan x-\int\sec x\tan^2 xdx\\ &= \sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)dx\\ &= \sec x\tan x-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx\\ &= \sec x\tan x-\int\sec^3 xdx+\ln|\sec x+\tan x|\end{aligned}$$

따라서 $2\int\sec^3 xdx=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|$. $\int\sec^3 xdx=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$.

4. $u=x, dv=xe^{-x^2}dx$ 라도 두면, $du=dx, v=\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. 그러면

$$\int x^2e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}xe^{-x^2}+\frac{1}{2}\int e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}xe^{-x^2}+\frac{1}{2}Q(x)+C$$

7.6 점화식

1. $u=x^n, dv=e^xdx$ 라고 두면 $du=nx^{n-1}dx, v=e^x$ 이고

$$\int x^ne^xdx=x^ne^x-n\int x^{n-1}e^xdx$$

2. $\int(\sec^2 x-1)\tan^{n-2}xdx=\int\sec^2 x\tan^{n-2}xdx-\int\tan^{n-2}xdx$. 첫번째 적분에 대해서는 $u=\tan x$ 라고 하면 $du=\sec^2 xdx$ 이므로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int\tan^n xdx=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-\int\tan^{n-2}xdx$$

3. $u=(\ln x)^n, dv=dx$ 라고 두면, $du=n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx, v=x$ 이므로 $\int(\ln x)^ndx=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}dx$ 이다. 이것을 이용하면

$$\begin{aligned}\int(\ln x)^3dx &= x(\ln x)^3-3\int(\ln x)^2dx\\ &= x(\ln x)^3-3[x(\ln x)^2-2\int\ln xdx]\\ &= x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6(x\ln x-x)+C\end{aligned}$$

4. 먼저 공식 52(a)를 이용하면 $\int\sin^m x\cos^n xdx=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}\int\sin^{m-2}x\cos^n xdx$ 를 얻는다. 마지막 적분에 대해 공식 52(b)를 적용한다. (공식 52(b)는 사인 제곱으로 m을 사용하고 있으나 여기서는 사인은 $m-2$제곱이므로 공식을 적용할 때 m 대신 $m-2$를 사용해야

한다)

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\left[\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{m-2+n} + \frac{n-1}{m-2+n}\int \sin^{m-2} x \cos^{n-2} x dx\right]$$

5. 새로 얻은 적분에서는 분자에 m이 빠져있으므로 원래 식과 같은 형태가 아니기 때문이다.

6. (a) $u = \sin x$라고 하면 $du = \cos x dx$이고 $\int \sin x \cos x dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$ ($u = \cos x$라고 두고 $du = -\sin x dx$와 같은 치환을 해도 된다.)

   (b) $u = \cos x$라고 하면 $du = -\sin x dx$이고 $-\int u^{12} du = -\frac{1}{13}u^{13} + C = -\frac{1}{13}\cos^{13} x + C$

   (c) $m = 0, n = -5$로 두고 공식 52(c)를 사용하면 $\frac{-\sin x \cos^{-4} x}{-4} + \frac{-3}{-4}\int \sec^3 x dx$. 이제 공식 43을 사용하면 $\frac{1}{4}\sin x \sec^4 x + \frac{3}{4}[\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|] + C$

   (d) 공식 53을 사용한다. $\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - (\tan x - x) + C$

   (e) $u = \sin x$라고 하면 $du = \cos x dx$이고 $\int du/u^2 = -1/u + C = -1/\sin x + C$이다.

   (f)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx &= -\frac{\sin^3 x \cos^{-2} x}{-2} - \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \quad (\text{공식 } 52(c)) \\
&= \frac{1}{2}\sin^3 x \sec^2 x - \frac{1}{2}(-\sin x + \int \sec x dx) \quad (\text{공식 } 52(a)) \\
&= \frac{1}{2}\sin^3 x \sec^2 x - \frac{1}{2}(-\sin x + \ln|\sec x + \tan x|) + C \quad (\text{공식 } 33)
\end{aligned}$$

   (g) 공식 52(b)를 한 번 사용하거나 또는 $\int \sin^4 x(1-\sin^2 x)\cos x dx = \int (u^4 - u^6) du$ ($u = \sin x$로 두는 치환) $= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

   (h) $u = 3x$로 두면 $du = 3dx$. 그러면

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 3x dx &= \frac{1}{3}\int \sin^4 u du \\
&= \frac{1}{3}(-\frac{1}{4}\sin^3 u \cos u + \frac{3}{4}\int \sin^2 u du) \quad (\text{공식 } 52(a)) \\
&= -\frac{1}{12}\sin^3 u \cos u + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(u - \sin u \cos u) + C \\
&= -\frac{1}{12}\sin^3 3x \cos 3x + \frac{1}{8}(3x - \sin 3x \cos 3x) + C
\end{aligned}$$

7.

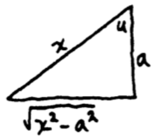
$$\begin{aligned}
\frac{-\sin^2 x \cos^{99} x}{101} - \frac{2}{101(99)}\cos^{99} x &= \frac{-\cos^{99} x}{99}\left[\frac{99}{101}\sin^2 x + \frac{2}{101}\right] \quad (\sin^2 x = 1 - \cos^2 x) \\
&= -\frac{\cos^{99} x}{99}\left[1 - \frac{99}{101}\cos^2 x\right] \\
&= \frac{-\cos^{99} x}{99} + \frac{\cos^{101} x}{101}
\end{aligned}$$

7.7 삼각 치환적분법

1. (아래 그림들을 참조한다)

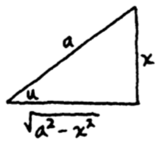
(a) $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan u,\ x = a\sec u,\ dx = a\sec u\tan u du.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a\tan u} a\sec u\tan u du &= \int \sec u du \\
&= \ln|\sec u + \tan u| + C \quad (\text{공식 } 33) \\
&= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C \\
&= \ln\frac{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}{a} + C \\
&= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + C \\
&= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + K
\end{aligned}$$



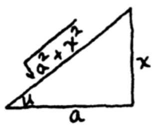
(b) $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos u,\ x = a\sin u,\ dx = a\cos u du$

$$\begin{aligned}
\int a\cos u\cdot a\cos u du &= a^2\int \cos^2 u du \\
&= \frac{1}{2}a^2(u+\sin u\cos u) + C \\
&= \frac{1}{2}a^2\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}a^2\arcsin x/a + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C
\end{aligned}$$



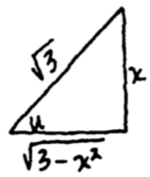
(c) $\sqrt{a^2+x^2} = a\sec u,\ x = a\tan u,\ dx = a\sec^2 u du$

$$\begin{aligned}
\int \frac{a\sec u}{a\tan u} a\sec^2 u du &= a\int \frac{du}{\cos^2 u\sin u} \\
&= a(\sec u + \int \csc u du) \quad (m=-1, n=-2\text{로 두고 공식 } 52(\text{c})) \\
&= a\sec u - a\ln|\csc u + \cot u| + C \quad (\text{공식 } 34) \\
&= \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + \frac{a}{x}\right| + C
\end{aligned}$$



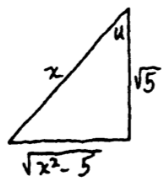
2. $\sqrt{3-x^2}=\sqrt{3}\cos u,\ x=\sqrt{3}\sin u,\ dx=\sqrt{3}\cos u du$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{3}\cos u}{3\sin^2 u}\sqrt{3}\cos u du &= \int \cot^2 u du \\ &= -\cot u - u + C \quad (\text{공식 } 42) \\ &= -\frac{\sqrt{3-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$



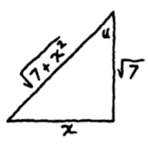
3. $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{5}\tan u,\ x=\sqrt{5}\sec u,\ dx=\sqrt{5}\sec u\tan u du$

$$\int \frac{\sqrt{5}\sec u\tan u du}{5\sec^2 u\sqrt{5}\tan u} = \frac{1}{5}\int \cos u du = \frac{1}{5}\sin u + C = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2-5}}{x} + C$$



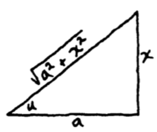
4. $\sqrt{7+x^2}=\sqrt{7}\sec u,\ (7+x^2)^2=(\sqrt{7}\sec u)^4=49\sec^4 u,\ x=\sqrt{7}\tan u,\ dx=\sqrt{7}\sec^2 u du$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{7}\sec^2 u du}{49\sec^4 u} &= \frac{1}{7\sqrt{7}}\int \cos^2 u du \\ &= \frac{1}{7\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2}(u+\sin u\cos u) + C \\ &= \frac{1}{14\sqrt{7}}\left(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{7}} + \frac{x\sqrt{7}}{7+x^2}\right) + C\end{aligned}$$



5. $x=a\tan u,\ dx=a\sec^2 u du,\ \sqrt{a^2+x^2}=a\sec u$

$$\int \frac{a\sec^2 u du}{(a\sec u)^3} = \frac{1}{a^2}\int \cos u du = \frac{1}{a^2}\sin u + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$$



7.8 적분 방법 선택

1. $u = \sqrt{x}$ 라고 하면 $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ 이므로 $\int 2\sin u du = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C$

2. $u = 1 - x^2$ 라고 하면 $du = -2xdx$ 이므로 $-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}u^{-2} + C = \frac{1}{4(1-x^2)^2} + C$

3. $\sqrt{2x+3} + C$

4. $u = x - 1$ 이라 하면 $du = dx$ 이므로 $\int (u+1)u^{20}du = \frac{1}{22}u^{22} + \frac{1}{21}u^{21} + C = (x-1)^{21}(\frac{1}{22}(x-1) + \frac{1}{21}) + C$ 또는 $u = x, dv = (x-1)^{20}dx$ 로 두고 부분적분을 한다.

5. $\displaystyle\int (x+1)dx + \int \frac{2}{x+1}dx = \frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln|x+1| + C$

6. $u = 4 - x^2$ 이라 하면 $du = -2xdx$ 이므로 $-\frac{1}{2}\int 1/\sqrt{u}du = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{4-x^2} + C$

7. $x^2 + 9x + C$

8. 부분분수분해를 하면 $\displaystyle\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$. 그러므로 역도함수는 $\ln|x| - \ln|1+x| + 1/(1+x) + C$

9. $\int 2/(1+x)dx - \int dx = 2\ln|1+x| - x + C$

10. $\displaystyle\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} = \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^2 x} = \csc^2 x - 2 + \sin^2 x = \csc^2 x - 2 + \frac{1-\cos 2x}{2}$ 이므로 역도함수는 $-\cot x - 2x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

11. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin x \cdot (1-\cos^2 x)}{\cos x}dx = \int \tan x dx - \int \sin x\cos x dx = -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\cos^2 x + C$

12. 아래 그림과 같은 삼각치환법을 사용한다. $\sqrt{2x^2-4} = 2\tan u$, $\frac{\sqrt{2}}{x} = \cos u$. $\frac{dx}{x^2} = \frac{\sin u}{\sqrt{2}}du$. 그러므로

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{2x^2-4}}{x^2}dx &= \int 2\tan u \cdot \frac{\sin u}{\sqrt{2}}du \\
&= \sqrt{2}\int \frac{\sin^2 u}{\cos u}du \\
&= \sqrt{2}\int \frac{1-\cos^2 u}{\cos u}du \\
&= \sqrt{2}\int (\sec u - \cos u)du \\
&= \sqrt{2}(\ln|\sec u + \tan u| - \sin u) + C \\
&= \ln|x + \sqrt{x^2-2}| - \frac{\sqrt{2x^2-4}}{x} + C
\end{aligned}$$

13. $u = \sec x, dv = \sec^2 x dx$ 라고 두면 $du = \sec x \tan x dx, v = \tan x$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx
\end{aligned}$$

그러므로

$$
\begin{aligned}
2\int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x + \int \sec x dx \\
&= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}
$$

즉

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}[\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|] + K$$

14. $u = x^2$ 이라고 하면 $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

15. $u = \sec^2 x, dv = \sec^2 x dx$ 라고 두면 $du = 2\sec^2 x \tan x, v = \tan x$ 이므로

$$
\begin{aligned}
\int \sec^4 x dx &= \sec^2 x \tan x - 2\int \sec^2 x \tan^2 x dx \\
&= \sec^2 x \tan x - \frac{2}{3}\tan^3 x + C
\end{aligned}
$$

16. $\frac{1}{3}e^{3x} + C$

17. $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$

18. $u = 2 - r^2$ 이라 하면, $-\frac{1}{3}(2-r^2)^{3/2} + C$

19. $\int \sin x(1-\cos^2 x)dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

20. $\int(2+3/x)dx = 2x + 3\ln|x| + C$

21. $\int \sin 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 5x + \sin x)dx = -\frac{1}{2}[\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x] + C$

22. $-\frac{1}{2}\pi\cos(2x/\pi) + C$

23. $\frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$

24. $u = x^2 + 7$ 이라고 하면 $\int x^2\sqrt{x^2+7}xdx = \int(u-7)\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}(\frac{2}{5}u^{5/2} - 7\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}) + C = u\sqrt{u}(\frac{1}{5}u - \frac{7}{3}) + C = (x^2+7)\sqrt{x^2+7}(\frac{1}{5}(x^2+7) - \frac{7}{3}) + C$

25. $u = \sin^{-1} x, dv = xdx$ 라고 하면 $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, v = \frac{1}{2}x^2$ 이므로

$$\int x\sin^{-1} x dx = \frac{1}{2}x^2\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

두번째 항에 대해 $\sqrt{1-x^2} = \sin u$ 로 두면 $x = \cos u$ 이고 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \cos^2 u du = -\int \frac{1+\cos 2u}{2}du = -\frac{1}{2}(u + \frac{1}{2}\sin 2u) + C = -\frac{1}{2}(u + \sin u \cos u) + C$. 따라서

$$
\begin{aligned}
\int x\sin^{-1} x dx &= \frac{1}{2}x^2\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}x^2\sin^{-1} x + \frac{1}{4}(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2}) + C
\end{aligned}
$$

26. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

27. $\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = \int(\sec x - \cos x)dx = \ln|\sec x + \tan x| - \sin x + C$

28. $u=e^x$ 이라 하면 $du=e^x dx$. 따라서 $\int 1/(e^x+e^{-x})dx=\int \dfrac{1/u}{u+1/u}du=\int \frac{1}{u^2+1}du=\tan^{-2}u+C=\tan^{-1}e^x+C$

29. $\int \sqrt{x^2-x+3}dx=\int \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}$

30. $u=4x+5$ 라고 하면 $\int 7\ln(4x+5)dx=\frac{7}{4}\int \ln u du=\frac{7}{4}[u\ln u-u]+C=\frac{7}{4}(4x+5)\ln(4x+5)-\frac{7}{4}(4x+5)+C$.

31. $\sqrt{3x^2-1}=\tan u$ 라고 하면 $\sqrt{3}x=\sec u$, $\sqrt{3}dx=\sec u\tan u du$ 이므로

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{3x^2-1}dx &= \int \frac{1}{3}\sec^2 u\tan u\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sec u\tan u du\\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\int \sec^3 u\tan^2 u du\\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\int \sec^3 u(\sec^2 u-1)du\\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\int \sec^5 u du-\int \sec^3 u du\right]\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \sec^5 u du$ 를 구해보자. $u=\sec^3 x, dv=\sec^2 x dx$ 로 두면 $du=3\sec^3 x\tan x dx, v=\tan x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sec^5 x dx &= \sec^3 x\tan x-3\int \sec^3 x\tan^2 x dx\\ &= \sec^3 x\tan x-3\int \sec^3 x(\sec^2 x-1)dx\\ &= \sec^3 x\tan x-3\int \sec^5 x dx+3\int \sec^3 x dx\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}4\int \sec^5 x dx &= \sec^3 x\tan x+3\int \sec^3 x dx\\ &= \sec^3 x\tan x+\frac{3}{2}[\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|]+C\end{aligned}$$

즉

$$\int \sec^5 u du=\frac{1}{4}\sec^3 u\tan u+\frac{3}{4}\int \sec^3 u du$$

이므로

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{3x^2-1}dx &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\frac{1}{4}\sec^3 u\tan u-\frac{1}{4}\int \sec^3 u du\right]\\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}}\sec^3 u\tan u-\frac{1}{24\sqrt{3}}[\sec u\tan u+\ln|\sec u+\tan u|]+C\\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}}3\sqrt{3}x^3\sqrt{3x^2-1}-\frac{1}{24\sqrt{3}}[\sqrt{3}x\sqrt{3x^2-1}+\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-1}|]+C\\ &= \frac{1}{4}x^3\sqrt{3x^2-1}-\frac{1}{24\sqrt{3}}[\sqrt{3}x\sqrt{3x^2-1}+\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-1}|]+C\end{aligned}$$

32. $u=\sin x$ 라고 하면 $du=\cos x dx$ 이고 $\int \cos^3 x\sin^2 x dx=\int(1-\sin^2 x)\sin^2 x(\cos x dx)=\int(1-u^2)u^2 du=\int(u^2-u^4)du=\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5+C=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

33. $u = \cos x$ 라고 하면 $du = -\sin x dx$ 이고 $\int \sin^5 x dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)^2 dx = -\int(1-u^2)^2 du = -\int(u^4 - 2u^2 + 1)du = -\frac{1}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 - u + C = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

34. 부분분수분해를 하면 $\dfrac{x}{(x^2-5)(1-x)} = \dfrac{-\sqrt{5}+1}{8} \cdot \dfrac{1}{x+\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{5}+1}{8} \cdot \dfrac{1}{x-\sqrt{5}} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{x-1}$ 이므로

$$\int \frac{x}{(x^2-5)(1-x)}dx = \frac{-\sqrt{5}+1}{8}\ln|x+\sqrt{5}| + \frac{\sqrt{5}+1}{8}\ln|x-\sqrt{5}| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$$

35. $u = e^{2x}, dv = \sin 3x dx$ 라고 하면 $du = 2e^{2x}dx, v = -\frac{1}{3}\cos 3x$ 이므로

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx$$

다시 $u = e^{2x}, dv = \cos 3x dx$ 라고 하면 $du = 2e^{2x}dx, v = \frac{1}{3}\sin 3x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin 3x dx &= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx\right] \\ &= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx\end{aligned}$$

그러므로

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{9}{13}\left[-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x\right] = -\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x$$

36. $\dfrac{x+4}{(2x-1)(x+1)} = \dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{1}{x+1}$ 이므로 $\int \frac{x+4}{2x^2+x-1}dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1| - \ln|x+1| + C$

37. $u = (\ln x)^3, dv = dx$ 이면 $du = 3(\ln x)^2 \cdot dx/x, v = x$ 이므로 $\int(\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3\int(\ln x)^2 dx$. 다시 $u = (\ln x)^2, dv = dx$ 라고 하면 $du = 2(\ln x)\cdot dx/x, v = x$ 이므로 $\int(\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6\int x\ln x dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$.

38. $u = x^3, dv = \sin x dx$ 라고 하면 $du = 3x^2 dx, v = -\cos x$ 이므로 $\int x^3 \sin x dx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x dx$. 다시 $u = x^2, dv = \cos x dx$ 라고 하면 $du = 2x dx, v = \sin x$ 이고 따라서 $\int x^3\sin x dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x\sin x dx$. 다시 한 번 $u = x, dv = \sin x dx$ 라고 하면 $du = dx, v = -\cos x$ 이므로 $\int x^3 \sin x dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - \int\cos x dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$

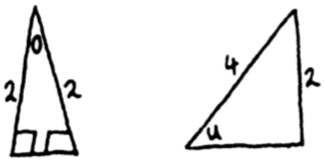
7.9 역미분 기법과 기본정리

1. (a) $du = 3dx$, $\int_2^5 \sin^5 x dx = \frac{1}{3}\int_6^{15}\sin^5 \frac{1}{3}u du$

   (b) $du = \frac{1}{x}dx$, $\int_1^{e^3}\sin(\ln x)dx = \int_0^3 \sin u \cdot x du = \int_0^3 e^u \sin u du$

   (c) $x = 2\csc u$, $dx = -2\csc u\cot u du$, $\sqrt{x^2-4} = 2\cot u$. $x = 2$ 이면 $u = \pi/2$ 이고 $x = 4$ 이면 $u = \pi/6$ 이다. (아래 그림 참조)

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx = \int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{2\cot u}{4\csc^2 u}\cdot -2\csc u\cot u du = -\int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{\cos^2 u}{\sin u du}$$



2. (a) $u=3x^2-1$ 이라고 하면 $du=6xdx$ 이고

$$\frac{1}{6}\int_{11}^{47}u^{10}du=\frac{1}{6}\frac{1}{11}u^{11}\Big|_{11}^{47}=\frac{1}{66}(47^{11}-11^{11})$$

(b) $u=e^{-x}, dv=\cos xdx$ 로 두고 부분적분을 하면

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos xdx=e^{-x}\sin x\big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}\sin xdx=\int_0^\infty e^{-x}\sin xdx$$

다시 한번 $u=e^{-x}, dv=\sin xdx$ 로 두고 부분적분을 하면

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos xdx=-e^{-x}\cos x\big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-x}\cos xdx$$

그런데 $-e^{-x}\cos x\big|_0^\infty=1$ 이므로 $\int_0^\infty e^{-x}\cos xdx=\frac{1}{2}$

(c) $u=\ln x$ 라고 하면 $du=\frac{1}{x}dx$ 이므로

$$\int_0^1 u^5du=\frac{1}{6}u^6\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

(d) 공식 52(a)를 사용하면

$$-\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x\big|_{\pi/2}^{\pi}+\frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\pi/16$$

(e) $u=x^3$ 이라 하면 $du=3x^2dx$ 이고

$$\int_{-\infty}^{2}x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{8}e^udu=\frac{1}{3}e^8$$

(f) $u=x^2+4$ 라고 하면 $du=2xdx$ 이고

$$\frac{1}{2}\int_4^8\sqrt{u}du=\frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_4^8=\frac{8\sqrt{8}}{3}-\frac{8}{3}$$

3. (a) $u=1-x$ 라 하면 $du=-dx$ 이고

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^m(1-x)^ndx&=-\int_1^0(1-u)^mu^ndu\\&=\int_0^1(1-u)^mu^ndu\\&=\int_0^1(1-x)^mx^ndx\end{aligned}$$

(b) $u=x+20$ 이라고 하면 $u=dx$ 이고

$$\int_0^{10}(x+20)^2dx=\int_{20}^{30}u^du=\int_{20}^{30}x^2dx$$

(c) $u = \frac{1}{2}x$ 라고 하면 $du = \frac{1}{2}dx$ 이고

$$\int_{2a}^{2b} \sqrt{\sin \frac{1}{2}x} dx = 2\int_a^b \sqrt{\sin u} du = 2\int_a^b \sqrt{\sin x} dx$$

4. $u = \ln \ln x, dv = x dx$ 라고 두면 $du = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} dx, v = \frac{1}{2}x^2$ 이고

$$\int_2^3 \ln \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln \ln x\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx = \frac{9}{2}\ln \ln 3 - 2\ln \ln 2 - \frac{1}{2}k$$