10장 공간좌표
연습문제 해답

10.1 구면

1. 중심에서 원점까지 거리는 $\sqrt{50}$ 이다. 따라서 구면의 방정식은 $(x-4)^2+(y+3)^2+(z-5)^2 = 50$

2. $x^2 + y^2 + z^2 + z + \frac{1}{4} = 0, x^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. 중심이 $(0, 0, -\frac{1}{2})$ 이고 반지름이 $\frac{1}{2}$ 인 구면

3. 좌변에 $x = 0, y = 0, z = 0$ 을 대입한 결과는 2보다 크다. 따라서 원점은 구면 외부에 있다. 다른 방법으로는 원점으로부터 중심 $(-2, 3, 2)$ 까지의 거리가 $\sqrt{17}$ 인데 이것은 반지름인 $\sqrt{2}$ 보다 크므로 원점은 구면 외부에 있다.

4. $(3, 5, 6)$ 으로부터 xy-평면까지의 거리는 z 의 좌표값인 6이다. 따라서 방정식은 $(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 36$

10.2 평면

1. (a) 법선 벡터는 $(5, 3, 1)$ 이므로 평면의 방정식은 $5(x-5)+3(y-5)+z-4 = 0, 5x+3y+z = 44$
   (b) 각 절편은 $a = 2, b = 5, c = 7$ 이므로 평면의 방정식은 $x/2 + y/5 + z/7 = 1$
   (c) x-축과 수직이라는 의미는 yz-평면에 나란하다는 것이므로 평면의 방정식은 $x = 3$
   (d) $z = 5$
   (e) 법선 벡터는 $2\vec{i}+9\vec{j}-6\vec{k}$. 평면의 방정식은 $2(x-3)+9(y-\pi)-6(z-7) = 0, 2x+9y-6z = 9\pi - 36$

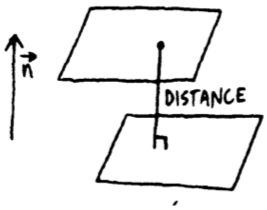
2. 평면 ABC에 법선인 벡터는 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -4, 2) \times (3, 1, 5) = (-22, 1, 13)$. 평면의 방정식은 $-22(x-1)+(y-3)+13(z+2) = 0, -22x+y+13z = -45$. 점 D를 평면의 방정식에 대입하여 보면 $-22(1) + 2 + 13(3) =? -45$ 등식이 성립하지 않는다. 즉 네 점은 한 평면 위에 있지 않다.

3. 평면의 방정식을 다시 쓰면 $3x - 4y + 2z - 6 = 0$ 이고 거리는
$$\frac{|3(2) - 4(3) + 2(-4) - 6|}{\sqrt{9 + 16 + 4}} = \frac{20}{\sqrt{29}}$$

4. 직선의 방정식을 다시 쓰면 $3x - y + 4 = 0$ 이고 거리는
$$\frac{|3(0) - 0 + 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

5. 구의 반지름은 중심으로부터 평면까지의 거리이므로 $\dfrac{|2(1)+3-(-1)-4|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$. 따라서 구면의 방정식은 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = \frac{4}{6}$

6. 두 평면은 모두 공통 법선 벡터 $\vec{n} = 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$를 가지므로 평행하다 (아래 그림 참조) 두 평면 사이의 거리를 구하기 위해서는 한 평면 위의 임의의 한 점을 선택하고 이 점으로부터 다른 평면까지의 거리를 구하면 된다. 첫 번째 평면 위의 점 $(0,0,2)$를 선택하고 두 번째 평면까지의 거리를 구하면 $\dfrac{|2(0)-0+3(2)-8|}{\sqrt{4+1+9}} = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$



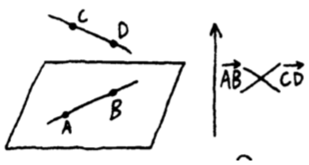
7. 평면의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$이므로 거리는

$$D = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2}}$$

양변을 제곱하고 정리하면

$$D^2 = \frac{1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}, \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{1}{D^2}$$

8. 평면의 수직인 벡터는 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD} = (1,1,-1)\times(3,13,3) = (16,-6,10)$ (아래 그림 참조). 점 A (또는 점 B)를 사용하여 평면의 방정식을 구하면 $16(x+1)-6(y-2)+10(z-4) = 0$, $16x-6y+10z = 12$.



10.3 직선

1. (a) 구하고자 하는 직선은 주어진 직선과 평행한 벡터가 $(1,-2,5)$로 동일하다. 따라서 직선의 방정식은 $x=1+t, y=2-2t, z=3+5t$

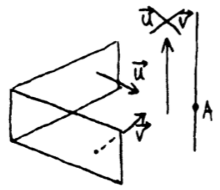
   (b) 평면의 법선 벡터는 $(3,-4,6)$. 이 벡터와 직선이 나란하므로 직선의 방정식은 $x=1+3t, y=4-4t, z=5+6t$

   (c) (방법 1) 평행한 벡터는 $\vec{i}=(1,0.0)$. 그러므로 직선의 방정식은 $x=2+t, y=3, z=4$
   (방법 2) 직선 위의 모든 점들은 $y=3, z=4$를 만족하고 x는 어떤 값이든 될 수 있다. 따라서 직선의 방정식은 $x=t, y=3, z=4$

(d) 직선은 y-축과 평행하므로 직선 위의 모든 점은 $x = 2, z = 4$를 만족하고 y는 어떤 값이든 될 수 있다. 따라서 직선의 방정식은 $x = 3, y = t, z = 4$

(e) 평행한 벡터는 $7\vec{i} - \vec{j} + 16\vec{k}$ 이므로 직선의 방정식은 $x = 7t, y = -t, z = 16t$

(f) (아래 그림 참조) 각 평면의 법선 벡터는 $\vec{u} = (2, -1, 1)$과 $\vec{v} = (3, 1, 4)$. $\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5)$는 직선과 평행하다. 방향이 같은 좀 더 간단한 벡터 $(1, 1, -1)$를 사용하면 직선의 방정식은 $x = 1 + t, y = 5 + t, z = 7 - t$이다.

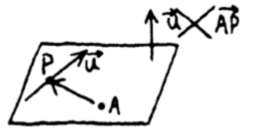


2. 평행한 벡터는 $\overrightarrow{AB} = (14, -5)$. 점 A를 이용하면 직선의 방정식은 $x = -1 + 14t, y = 3 - 5t$. (만일 점 B를 이용한다면 $x = 13 + 14t, y = -2 - 5t$)

3. (a) $y = 0$

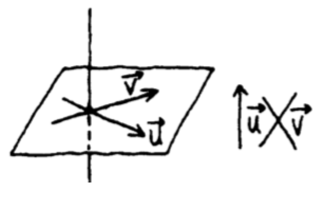
   (b) $x = 0, y = 0, z = t$

4. (아래 그림 참조) 직선 위에 점 $P = (6, 2, 7)$이 있고 평행한 벡터는 $\vec{u} = (4, -1, 8)$이다. 그러므로 $\vec{u}$와 $\overrightarrow{AP} = (3, 3, 5)$는 모두 평면에 평행하고 $\vec{u} \times \overrightarrow{AP} = (-29, 4, 15)$는 평면에 수직이다. 그러므로 평면의 방정식은 $-29(x - 3) + 4(y + 1) + 15(z - 2) = 0$, $-29x + 4y + 15z = -61$



5. (a) 점 $(4, -5, 16)$은 $t = 2$일 때 첫번째 직선 위에 있고 $t = -1$일 때 두 번째 직선 위에 있으므로 두 직선은 이 점을 지난다. 하지만 첫번째 직선의 평행한 벡터는 $\vec{u} = (1, -4, 5)$와 $\vec{v} = (2, -1, -6)$으로 서로 다르므로 서로 평행한 직선이 아니다.

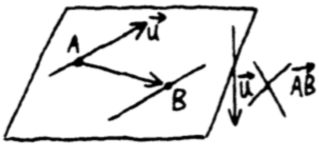
   (b) (아래 그림 참조) 평면에 수직인 벡터는 $\vec{u} \times \vec{v} = (29, 16, 7)$이다. 첫 번째 직선 위에 있는 점 $(2, 3, 6)$을 이용하면 평면의 방정식은 $29(x - 2) + 16(y - 3) + 7(z - 6) = 0$, $29x + 16y + 7z = 148$.



   (c) $\vec{u} \times \vec{v}$는 직선과 평행하다. 그러므로 직선의 방정식은 $x = 4 + 29t, y = -5 + 16t, z = 16 + 7t$

6. $x = 0$으로 두면 $t = 2$를 얻고 $y = 11, z = -1$이 된다. 그러므로 교차점은 $(0, 11, -1)$

7. (아래 그림 참조) 두 직선 모두 평행한 벡터가 $\overrightarrow{u} = (-3,1,2)$로 같다. 그러므로 두 직선은 평행하다. 그러나 점 $A = (2,5,4)$는 첫 번째 직선 위에 있지만 두 번째 직선 위에는 없다 ($x = 2$가 되기 위에서는 $t = -3$이지만 $t = -3$이면 $y = 5, z = 4$가 되지 않는다). 평면의 방정식을 구하기 위해서는 법선 벡터가 필요하다. 점 $B = (-7,6,0)$과 점 $A = (2,5,4)$가 평면 위에 있는 점이므로 $\overrightarrow{AB}$는 평면과 나란하다. 그러므로 수직인 벡터는 $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{AB} = (-3,1,2) \times (-9,1,-4) = (-6,-30,6)$이다. 같은 방향의 좀 더 간단한 벡터 $(1,5,-1)$와 점 A를 이용하면 평면의 방정식은 $x - 2 + 5(y-5) - (z-4) = 0, x + 5y - z = 23$



8. $\overrightarrow{AB} = (3,2,2)$. 직선 AB의 방정식은 $x = 1 + 3t, y = 3 + 2t, z = -2 + 2t$. 점 C는 이 직선 위의 점이 아닌데 왜냐하면 $x = 3$이 되기 위해서는 $t = \frac{2}{3}$이어야 하지만 $t = \frac{2}{3}$이면 $y = 3, z = 5$가 되지 않기 때문이다.

9. $aA + bB + cC = 0$으로 부터 직선의 평행한 벡터 (a,b,c)와 평면의 법선 벡터 (A,B,C)가 서로 수직이므로 직선과 평면은 서로 평행하다. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$으로부터 직선 위의 점 (x_0,y_0,z_0)은 평면의 방정식도 만족하므로 직선과 평면은 점 (x_0,y_0,z_0)에서 만난다. 이러한 사실들을 종합하면 직선은 평면에 포함된다.

10. (a) 평행한 벡터는 $(-6,1,3)$과 $(12,-2,-6)$. 두 벡터는 서로 평행하다. 점 $(1,2,4)$는 ($t = 0$일 때) 첫 번째 직선은 지나지만 두번째 직선은 지나지 않는다 ($x = 1$이기 위해서는 $t = \frac{1}{2}$이어야 하는데 $t = \frac{1}{2}$일 때 $z = 4$가 나오지 않는다). 따라서 두 직선은 서로 평행하다 (일치하지는 않는다.)

    (b) 평행한 벡터는 $(-1,2,-3)$과 $(1,-4,6)$. 두 벡터는 서로 평행하지 않다. 따라서 두 직선은 평행하거나 일치하지 않는다. $2 - t = s, 3 + 2t = 504s, 5 - 3t = -1 + 6s$를 풀면 처음 두 연립방정식으로부터 $s = -1, t = 3$을 얻지만 이 값은 세 번째 방정식을 만족하지 않는다. 따라서 두 직선은 서로 꼬인 위치에 있다.

    (c) 평행한 벡터는 $(-1,1,2)$과 $(-1,2,1)$. 두 벡터는 서로 평행하지 않다. $2-t = 3-s, 3+t = 4+2s, 5+2t = 1+s$를 풀면 처음 두 연립방정식으로부터 $s = -2, t = -3$을 얻고 이 값은 세 번째 방정식도 만족한다. 따라서 두 직선은 한 점 $(5,0,-1)$에서 만난다.

    (d) 평행한 벡터는 $(3,-1,1)$과 $(-3,1,-1)$이다. 두 벡터는 서로 평행하다. 점 $(2,5,3)$은 첫 번째 직선도 지나고 ($t = 0$일 때) 두 번째 직선도 지난다 ($t = -2$일 때). 따라서 두 직선은 서로 일치한다.

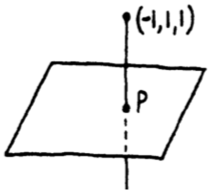
11. (a) $2(1+2t) + 6(3-t) + 2 + 2t = 8, 0 = -14$. 해가 없다. 직선은 평행하지만 평면에 포함되지는 않는다. 즉 교점이 없다.

    (b) $2(1+2t) + 6(3-t) + 2 + 2t = 22, 0 = 0$. 모든 t 값이 해가 된다. 직선은 평면 위에 놓여 있다. 즉 교점이 무수히 많다.

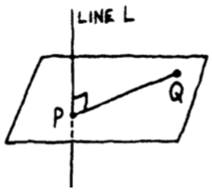
12. 각 평면에 수직인 벡터는 $\vec{u} = (2,1,3)$과 $\vec{v} = (1,-1,1)$이다. 교선에 평행한 벡터는 $\vec{u} \times \vec{v} = (4,1,-3)$이다. 교선 위의 점을 얻기 위해 $z = 0$으로 두고 $2x + y = 5, x - y = 4$를 풀면 $x = 3, y = -1$을 얻는다. 따라서 교선은 점 $(3,-1,0)$을 지난다. 교선의 방정식은 $x = 3 + 4t, y = -1 + t, z = -3t$

13. 직선에 평행한 벡터는 $\vec{u} = (1,2,8) \times (1,-1,2) = (12,6,-3)$. 세 번째 평면에 수직인 벡터는 $\vec{v} = (3,-2.8)$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$이므로 두 벡터는 수직이고 직선은 평면과 평행하다. 직선이 평면에 포함되지 않음을 보이기 위해 교선 위의 한 점을 구한다. $z = 0$으로 두고 $x + 2y - 20 = 0, x - y - 8 = 0$을 풀면 $x = 12, y = 4$를 얻는다. 즉 점 $(12,4,0)$은 교선 위의 점이다. 하지만 이 점은 세번째 평면의 방정식에 대입하면 만족하지 않는다 $(36 - 8 + 0 \neq 5)$ 따라서 교선은 평면과 평행하지만 포함되지는 않는다.

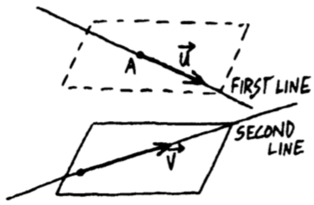
14. (아래 그림 참조) 평면에 수직인 벡터는 $\vec{u} = (2,-3,1)$. 그러므로 직선과 평행한 벡터는 $\vec{u}$이고 직선의 방정식은 $x = -1 + 2t, y = 1 - 3t, z = 1 + t$. 점 P는 이 직선과 평면의 교점이다. $2(-1+2t) - 3(1-3t) + 1 + t + 1 = 0$을 풀면 $t = \frac{3}{14}$를 얻고, 점 $P = (-1 + \frac{6}{14}, 1 - \frac{9}{14}, 1 + \frac{3}{14}) = (-\frac{8}{14}, \frac{5}{14}, \frac{17}{14})$



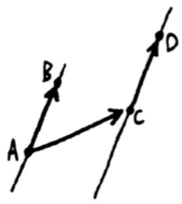
15. (아래 그림 참조) 직선과 평행한 벡터는 $\vec{u} = (1,-1,4)$. 그러므로 $\vec{u}$는 평면과 수직이다. 평면의 방정식은 $x - 4 - (y+1) + 4(z-4) = 0, x - y + 4z = 21$. 점 P는 직선과 평면의 교점이므로 $1 + t - (2-t) + 4(3+4t) = 21$을 풀면 $t = \frac{5}{9}$를 얻고 점 $P = (1 + \frac{5}{9}, 2 - \frac{5}{9}, 3 + \frac{20}{9}) = (\frac{14}{9}, \frac{13}{9}, \frac{47}{9})$이다. 점 Q로부터 직선 L까지의 거리는 $\overline{PQ} = \sqrt{(4 - \frac{14}{9})^2 + (-1 - \frac{13}{9})^2 + (4 - \frac{47}{9}^2}$.



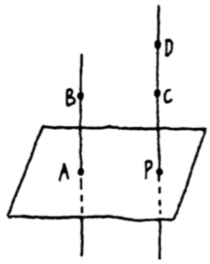
16. 두 직선의 평행한 벡터는 $\vec{u} = (-1,1,2)$과 $\vec{v} = (-1,2,7)$이고 서로 평행이 아니다. $2 - t = 3 - s, 3 + t = 4 + 2s, 5 + 2t = 1 + 7s$를 풀면, 첫 두 개의 연립방정식으로부터 $s = -2, t = -3$을 얻지만 이 값은 세 번째 방정식을 만족시키지 않는다. 그러므로 두 직선을 꼬인 위치에 있다. 두 번째 직선을 포함하고 첫 번째 직선과 평행인 평면을 생각하자. (아래 그림 참조) 평면에 수직인 벡터는 $\vec{u} \times \vec{v} = (3,5,-1)$이고 점 $(3,4,1)$을 이용하면 평면의 방정식은 $3(x-3) + 5(y-4) - (z-1) = 0, 3x + 5y - z = 28$. 두 직선 사이의 거리는 첫 번째 직선 위의 임의의 점으로부터 평면까지의 거리다. 점 $A = (2,3,5)$를 사용하면 평면까지의 거리는 $\dfrac{|3(2) + 5(3) - 5 - 28|}{\sqrt{9 + 25 + 1}} = \dfrac{12}{\sqrt{35}}$.



17. (a) (아래 그림 참조) $\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -2)$, $\overrightarrow{CD} = (3, -12, 6)$으로 두 벡터는 평행하다. 그러나 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC} = (1, 5, 4)$는 평행하지 않다. 두 직선은 평행하다 (일치하지는 않는다).

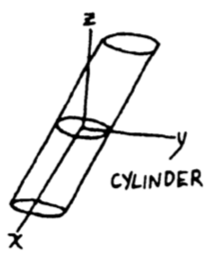


(b) (아래 그림 참조) 평면의 법선 벡터는 $\overrightarrow{AB}$이고 평면의 방정식은 $-(x-3)+4(y-0)-2(z-2)=0$, $-x+4y-2z=-7$이다. 직선 CD와 평면의 교점 P를 구한다. 직선 CD의 방정식은 $x = 4-t, y = 5+4t, z = 6-2t$이므로 $-(4-t)+4(5+4t)-2(6-2t) = -7$을 풀면 $t = -\frac{11}{21}$을 얻고 점 $P = (4+\frac{11}{21}, 5-\frac{44}{21}, 6+\frac{22}{21}) = (\frac{95}{21}, \frac{61}{21}, \frac{148}{21})$이다. 두 평행한 직선 사이의 거리는 $\overline{AP} = \sqrt{(3-\frac{95}{21})^2 + (\frac{61}{21})^2 + (2-\frac{148}{21})^2}$

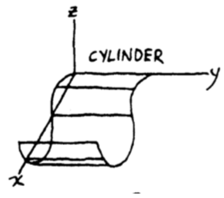


10.4 기둥곡면과 이차곡면

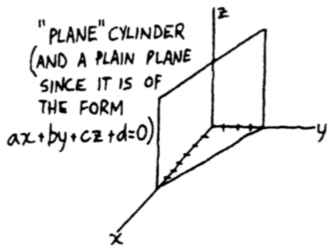
1. .



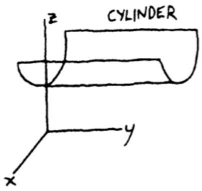
2. .


z
CYLINDER
y
x

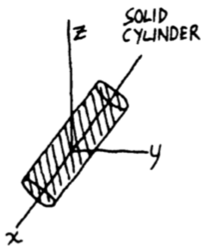
3. .


"PLANE" CYLINDER
(AND A PLAIN PLANE
SINCE IT IS OF
THE FORM
ax+by+cz+d=0)
z
y
x

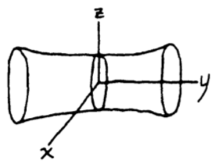
4. .


z
CYLINDER
y
x

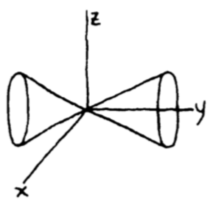
5. .


z
SOLID
CYLINDER
y
x

6. .

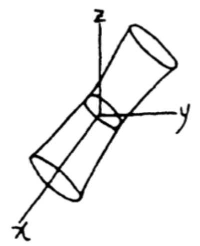

z
y
x

7. .

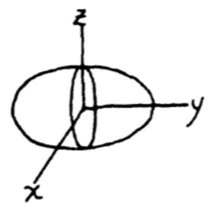

z
y
x

8. .

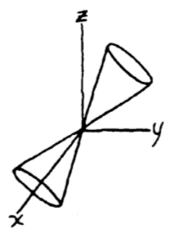
9. .



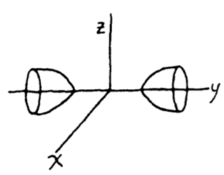
10. .



11. .

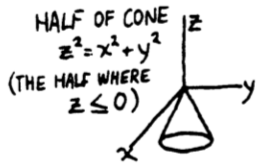


12. .

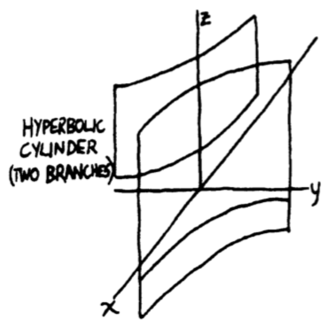


13. .

14. .



15. .



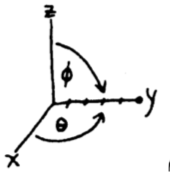
16. 쌍곡포물면이고 안장 형태. 손으로 그리기 어려움

17. 타원이 아닌 원이 되기 위해서는 $a = b$ 이어야 한다. $z = 6$ 이면 $x^2/a^2 + y^2/a^2 = 36$, $x^2 + y^2 = 36a^2$. $36a^2 = 9$ 가 되어야 하므로 $a = \frac{1}{2}$. 방정식은 $4x^2 + 4y^2 = z^2$.

10.5 원기둥좌표계와 구면좌표계

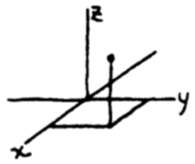
1. (a) (아래 그림 참조) 점은 yz-평면 위에 있다. 따라서 $\theta = 90°$. z-축까지의 거리는 2 이므로 $r = 2$. $z = 3$ 은 주어져 있다.

(b) (아래 그림 참조) 원점까지의 거리는 5 이므로 $\rho = 5$. 점이 xy-평면 위에 있으므로 $\phi = 90°$. 점이 $90°$ 만큼 돌아 있으므로 $\theta = 90°$

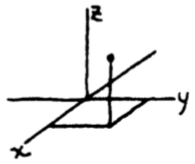


2. (아래 그림 참조)

   (a) $z = 5, r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}, \tan\theta = \frac{2}{3}$, θ는 1사분면에 있고 약 $34°$ 정도이다.



   (b) $z = 5, r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}, \tan\theta = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$, θ는 3사분면에 있고 약 $214°$ 정도이다.

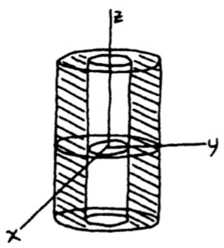


3. (a) $x = 2\cos 150° = 2(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$, $y = 2\sin 150° = 2(\frac{1}{2}) = 1$, $z = 7$

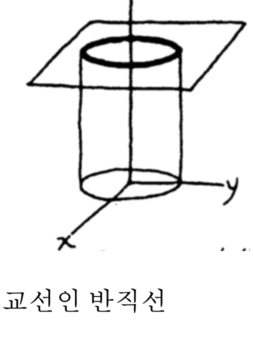
   (b) $x = 2\sin 30° \cos 120° = 2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, $y = 2\sin 30° \sin 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $z = 2\cos 30° = \sqrt{3}$

4. (아래 그림 참조)

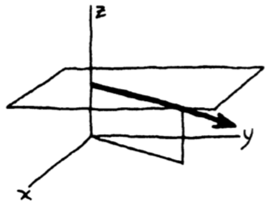
   (a) 두 원기둥 사이의 영역과 표면



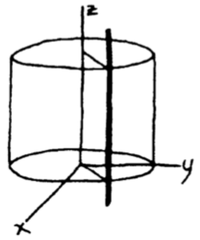
   (b) 원기둥 $r = 3$과 평면 $z = 2$의 교선인 원



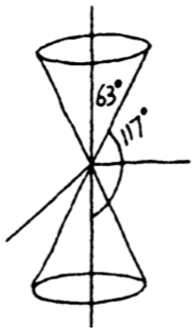
   (c) 반평면 $\theta = \pi/3$과 평면 $z = 7$의 교선인 반직선



(d) 원기등 $r = 3$과 반평면 $\theta = \pi/3$의 교선인 직선



5. (a) (아래 그림 참조) 원뿔. 원기둥 좌표계에서는 $r^2 = 4z^2$. 구면 좌표계에서는 $\rho^2 \sin^2 \phi(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4\rho^2 \cos^2 \phi$, $\tan^2 \phi = 4$, $\tan \phi = \pm 2$, 그러므로 방정식은 $\phi = 63°$ 또는 $117°$ (근사값).



(b) 구. 원기둥 좌표계에서는 $r^2 + z^2 = 10$. 구면 좌표계에서는 $\rho = \sqrt{10}$.

6. (a) xy-평면은 $z = 0$, z-축은 $r = 0$

(b) xy-평면은 $\phi = 90°$, z-축은 $\phi = 0°$ 또는 $180°$

7. (a) 직교좌표계에서는 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 구면 좌표계에서는 ρ. $r^2 = x^2 + y^2$을 이용하여 직교좌표계에서의 답을 원기둥 좌표계에서의 $\sqrt{r^2 + z^2}$으로 변환한다. (그림 [10.24]의 삼각형 ABP에서도 확인할 수 있다.)

(b) 원기둥좌표계에서는 r, r을 직교좌표계에서의 $\sqrt{x^2 + y^2}$으로 바꾼다. [그림 10.24]의 삼각형 ABP를 사용하면 r을 구면 좌표계에서 $\rho \sin \phi$로 바꾼다.