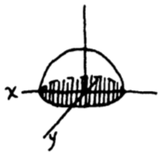
12장 다중적분
연습문제 해답

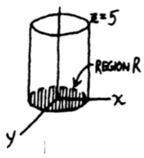
12.1 이중적분의 정의와 응용

1. $\int_R 5dA = 5\int_R dA = 5 \times R$의 넓이 $= 5 \times 4\pi = 20\pi$

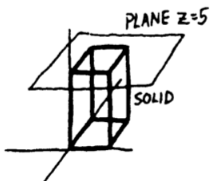
2. (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$의 윗부분인 반구를 생각하자. 이 반구는 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$의 그래프 아래 그리고 반지름이 3인 원 영역 R 위에 해당한다. 그러므로 반구의 부피는 $\int_R \sqrt{9 - x^2 - y^2}dA$



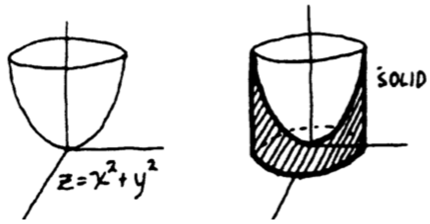
   (b) 표시된 원기둥은 평면 $z = 5$ 아래와 반지름이 2인 원영역 R 위에 해당하므로 원기둥의 부피는 $\int_R 5dA$



3. (a) 입체의 뚜껑은 평면 $z = 5$이고 바닥은 영역 R_1이다. 입체는 아래 그림과 같은 직육면체이다.



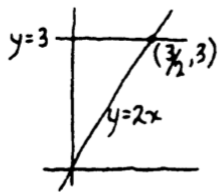
   (b) 입체의 윗면은 포물면 $z = x^2 + y^2$이고 바닥은 영역 R_2이다. 입체는 아래 그림과 같이 윗면의 아래와 바닥의 윗부분으로 이루어져 있다.



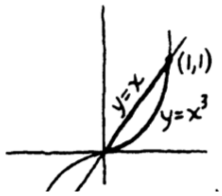
4. (a) 영역 III 에서 각 $xydA$는 양수다 ($x<0, y<0$이기 때문) 그러므로 $\sum xydA$는 양수이고 $\int_{III} xydA$는 양수다. 다른 방법으로는 $z=xy$의 그래프가 공간상에서 영역 III '위'의 곡면이므로 적분은 양수다.
   (b) (아래 그림 참조) $xydA$가 양수인 영역 I의 각 부분영역에 대해, $xydA$가 음수가 되는 영역 II ($x<0$이므로) 에서의 대응되는 부분영역이 존재한다. 그러므로 $\sum xydA=0$이고 $\int_{I+II} xydA=0$이다.
   (c) (b)와 동일하다.
   (d) 각 xy^2dA가 음수이므로 적분 결과는 음수다.
   (e) 양수다. 사실 적분 결과는 영역 IV의 넓이다.
5. 반드시 증가하지는 않는다. 만일 $f(x,y)$가 확장된 영역에서 음수이면 더해지는 추가 $f(x,y)dA$들이 합을 더 작게 만들게 되고, 적분 결과가 커지지 않는다.
6. $0dA$의 합은 0이므로 적분은 0이다.
7. (a) 참. 만일 $f(x,y)>g(x,y)$이면 임의의 부분영역에 대해 $f(x,y)dA>g(x,y)dA$이고 $\sum f(x,y)dA>\sum g(x,y)dA$이다. 다른 식으로는, f의 그래프가 g의 그래프보다 더 높이 있으므로 f의 그래프가 더 많은 부피를 만들게 된다.
   (b) 거짓. 만일 f가 더 작은 영역 R_2에서 더 크다면 R_2에서의 적분이 더 클 수도 있다. 특히 R_1 영역에서는 f의 값이 음수이고 R_2 영역에서는 양수이면 그럴 것이다.
   (c) 거짓. x와 y가 모두 양수라고 해도 모든 점에서 또는 몇몇 점에서 $f(x,y)$의 값이 음수일 수 있다. (예를 들면 $f(x,y)=-xy, f(x,y)=x+y-100$) 이런 경우에는 적분이 음수가 될 수 있다.
   (d) 참. 적분 결과는 R_1과 R_2의 넓이이므로
   (e) 참. 만일 $f(x,y)>0$이면 $f(x,y)dA>0$이고 $\sum f(x,y)dA>0$이다.
8. 식을 다시 정리하면 $\int_R xdA=(R\text{에서의 } x\text{의 평균값})\times R\text{의 넓이} =4\times 9\pi=36\pi$
9. 그렇지 않다. 전체 영역에서의 $\int xdA$는 0이다 (오른쪽 반 영역에서의 $\sum xdA$가 오른쪽 반 영역에서의 $\sum xdA$를 상쇄시키기 때문) 그러나 영역 I에서의 $4\int xdA$는 양수이다.

12.2 이중적분 계산

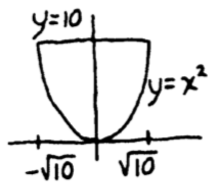
1. (a) $\displaystyle\int_{x=0}^{3/2}\int_{y=2x}^{y=3} x^3dydx$와 $\displaystyle\int_{y=0}^{y=3}\int_{x=0}^{x=y/2} x^3dxdy$. 두번째 식으로 계산하면 안쪽 적분 $=\frac{1}{4}x^4\Big|_{x=0}^{x=y/2}=\frac{1}{64}y^4$, 바깥쪽 적분 $=\displaystyle\int_0^3\frac{1}{64}y^4dy=\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{5}y^5\Big|_0^3=243/320$



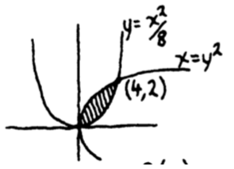
(b) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^3}^{y=x} 3dydx$ 와 $\displaystyle\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=\sqrt[3]{y}} 3dxdy$. 첫번째 식으로 계산하면 안쪽 적분 $= 3y\Big|_{y=x^3}^{y=x} = 3(x-x^3)$, 바깥쪽 적분 $= 3\left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \dfrac{3}{4}$



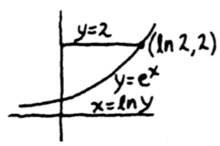
(c) $\displaystyle\int_{x=-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}}\int_{y=x^2}^{y=10} 2xydydx$ 와 $\displaystyle\int_{y=0}^{10}\int_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 2xydxdy$. 두번째 식으로 계산하면 안쪽 적분 $= x^2y\Big|_{x=-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = 0$. 그러므로 적분 $= 0$ (적분 결과가 0임을 충분히 짐작할 수 있는데 영역의 왼쪽 반영역에서 $2xydA$는 오른쪽 반영역에서의 $2xydA$의 음수이므로 합은 0이기 때문이다)



2. (a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=x^2/8}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)dydx$ 와 $\displaystyle\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=y^2}^{x=\sqrt{8y}} f(x,y)dxdy$



(b) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\ln 2}\int_{y=e^x}^{y=2} f(x,y)dydx$ 와 $\displaystyle\int_{y=1}^{y=2}\int_{x=0}^{x=\ln y} f(x,y)dxdy$

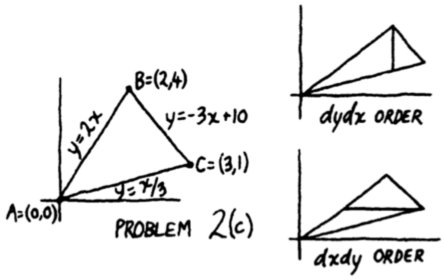


(c) $dydx$의 순서로 적분식을 세울 때, 윗쪽 경계가 두 개의 곡선(직선)으로 이루어져 있음에 유의해야 한다. 따라서

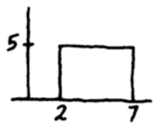
$$\int_{\text{왼쪽}} + \int_{\text{오른쪽}} = \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=x/3}^{y=2x} f(x,y)dydx + \int_{x=2}^{x=3}\int_{y=x/3}^{y=-3x+10} f(x,y)dydx$$

$dxdy$ 의 순서로 적분식을 세울 때는 오른쪽 경계가 두 개이 곡선(직선) 으로 이루어져 있음에 유의해야 한다. 따라서

$$\int_{\text{윗쪽}} + \int_{\text{아랫쪽}} = \int_{y=1}^{4} \int_{x=y/2}^{x=(10-y)/3} f(x,y)dxdy + \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y/2}^{x=3y} f(x,y)dxdy$$

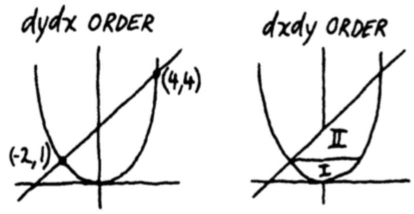


(d) $\int_{y=0}^{y=3} \int_{x=2}^{x=7} f(x,y)dxdy$ 와 $\int_{x=2}^{x=7} \int_{y=0}^{y=3} f(x,y)dydx$



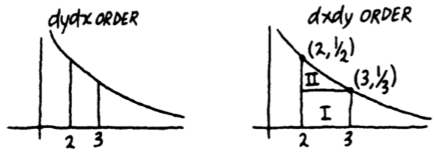
(e) 교점을 구하기 위해 $4y = x^2, x - 2y + 4 = 0$ 을 풀면 교점은 $(-2,1), (4,4)$ 이다.
$dydx$ 순서의 적분식은 $\int_{x=-2}^{x=4} \int_{y=x^2/4}^{y=2+x/2} f(x,y)dydx$ 이다.
다른 순서의 적분식을 세울 때에는 오른쪽 경계가 두 개의 곡선으로 이루어져 있어 영역을 나누어야 한다는 사실에 주의한다.

$$\int_I + \int_{II} = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=-2\sqrt{y}}^{x=2\sqrt{y}} f(x,y)dxdy + \int_{y=1}^{y=4} \int_{x=2y-4}^{x=2\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$

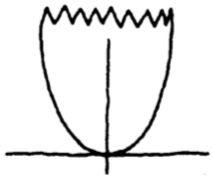


(f) $\int_{x=2}^{x=3} \int_{y=0}^{y=1/x} f(x,y)dydx$. 다른 순서의 적분식을 쓰기 위해서는 오른쪽 경계가 두 개의 곡선으로 이루어져 있어 영역을 나누어야 한다는 점에 주의한다.

$$\int_I + \int_{II} = \int_{y=0}^{y=1/3} \int_{x=2}^{x=3} f(x,y)dxdy + \int_{y=1/3}^{y=1/2} \int_{x=2}^{x=1/y} f(x,y)dxdy$$



(g) 영역의 “위쪽” 경계가 무한대다. $\int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=x^2}^{y=\infty} f(x,y)dydx$ 와 $\int_{y=0}^{y=\infty} \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$

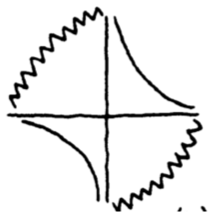


(h) 영역은 $xy = 1$과 무한대 경계로 둘러싸여 있다. 각 경계는 두 개의 곡선으로 이루어져 있다. 예를 들면, 왼쪽 경계는 쌍곡선 중 아래쪽 그래프와 무한대 경계의 일부이다. $dxdy$ 순서로는

$$\int_{\text{아래쪽 반}} + \int_{\text{윗쪽 반}} = \int_{y=-\infty}^{y=0} \int_{x=1/y}^{x=\infty} f(x,y)dxdy + \int_{y=0}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=1/y} f(x,y)dxdy$$

다른 순서로는

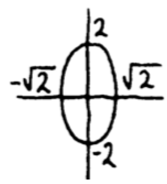
$$\int_{\text{왼쪽 반}} + \int_{\text{오른쪽 반}} = \int_{x=-\infty}^{x=0} \int_{y=1/x}^{y=\infty} f(x,y)dydx + \int_{x=0}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=1/x} f(x,y)dydx$$



(i) $\displaystyle\int_{y=0}^{y=2} \int_{x=y}^{x=y+3} f(x,y)dxdy$. 다른 순서로 적분식을 쓸 때는 영역을 세 부분으로 나누어야 한다.

$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{y=x} f(x,y)dydx + \int_{x=2}^{3} \int_{y=0}^{y=2} f(x,y)dydx + \int_{x=3}^{x=5} \int_{y=x-3}^{y=2} f(x,y)dydx$$

(j) $\displaystyle\int_{x=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{y=-\sqrt{4-2x^2}}^{y=\sqrt{4-2x^2}} f(x,y)dydx$ 와 $\displaystyle\int_{y=-2}^{y=2} \int_{x=-\sqrt{2-y^2/2}}^{x=\sqrt{2-y^2/2}} f(x,y)dxdy$



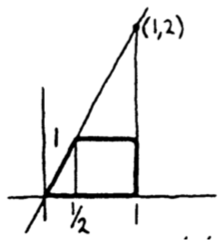
3. (a) 아랫쪽 경계와 위쪽 경계가 모두 두 개의 곡선(직선)으로 이루어져 있으므로 나누어야 한다.

$$\int_{\text{아랫부분}} + \int_{\text{윗부분}} = \int_{x=-1}^{x=0} \int_{y=-x-1}^{y=x+1} f(x,y)dydx + \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x-1}^{y=-x+1} f(x,y)dydx$$

(b) f 에 따라 달라진다. 만일 $f(x,y)$ 가 일사분면에서와 동일한 값을 2,3,4사분면에서도 갖는다면 일치한다. 그러나 일반적으로는 그렇지 않다. 예를 들어 $f(x,y)=x$ 이면 $\int_{\text{전영역}} = 0$ 이지만 $4\int_{1\text{사분면}}$ 는 양수다.

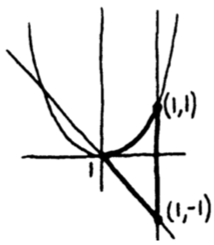
4. (a) 왼쪽 경계는 직선 $x=\frac{1}{2}y$ 이고 오른쪽 경계는 직선 $x=1$ 이다. y 의 양끝값은 0과 1 이다. 적분 순서를 바꾸기 위해서는 위쪽 경계가 두 개의 곡선이므로 영역을 나누어야 한다.

$$\int_{x=0}^{x=1/2}\int_{y=0}^{y=2x} f(x,y)dydx + \int_{x=1/2}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} f(x,y)dydx$$



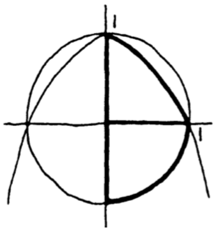
(b) 아래쪽 경계는 직선 $y=-x$ 이고 위쪽 경계는 포물선 $y=x^2$ 이다. x 의 양끝값은 0과 1 이다. 적분 순서를 바꾸기 위해서는 영역을 나누어야 한다.

$$\int_{\text{위쪽}} + \int_{\text{아래쪽}} = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=\sqrt{y}}^{x=1} f(x,y)dxdy + \int_{y=-1}^{y=0}\int_{x=-y}^{x=1} f(x,y)dxdy$$

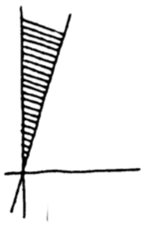


(c) 아래쪽 경계는 반원인 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 이고 위쪽 경계는 포물선 $y=1-x^2$ 이다. 적분 순서를 바꾸기 위해서는 영역을 나누어야 한다.

$$\int_{\text{위쪽}} + \int_{\text{아래쪽}} = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y}} f(x,y)dxdy + \int_{y=-1}^{0}\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$$

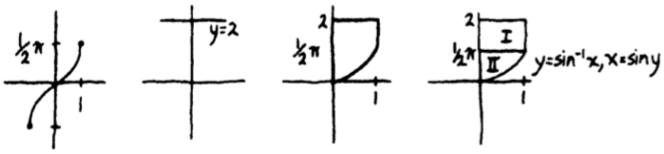


(d) $\int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{x=y/2} f(x,y)dxdy$



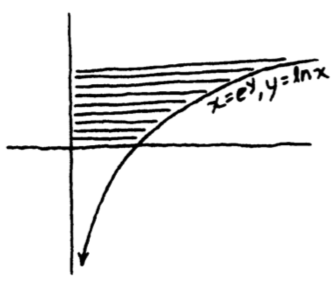
(e) 아래쪽 경계는 $y = \sin^{-1} x$ 이고 위쪽 경계는 $y = 2$ 이다. 두 경계가 실제로는 만나지 않는다는 점에 주의한다. 왜냐하면 $\sin^{-1} x$ 가 그렇게 큰 값이 될 수 없기 때문이다. x 의 양끝값은 0과 1이다. 적분 순서를 바꾸기 위해서는 오른쪽 경계가 두 개의 곡선이므로 영역을 나누어야 한다.

$$\int_I + \int_{II} = \int_{y=\pi/2}^{y=2}\int_{x=0}^{x=1} f(x,y)dxdy + \int_{y=0}^{y=\pi/2}\int_{x=0}^{x=\sin y} f(x,y)dxdy$$



(f) 왼쪽 경계는 y-축이고 오른쪽 경계는 $x = e^y$ 이다. 적분 순서를 바꾸기 위해서는 아래쪽 경계가 두 개의 곡선이므로 영역을 나누어야 한다.

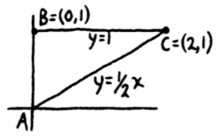
$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\infty} f(x,y)dydx + \int_{x=1}^{x=\infty}\int_{y=\ln x}^{y=\infty} f(x,y)dydx$$



5. $\int_{x=0}^{2}\int_{y=x/2}^{1} e^{y^2}dydx$ 와 $\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{x=2y} e^{y^2}dxdy$ 이다. 첫번째 적분식을 계산하기 위해서는 e^{y^2} 을

y에 대해 역미분해야 한다. 두번째 적분식에 대해서는

$$\begin{aligned}\text{안쪽 적분 } &= \int_{x=0}^{x=2y} e^{y^2}dx = xe^{y^2}\Big|_{x=0}^{x=2y} = 2ye^{y^2} \\ \text{바깥쪽 적분 } &= \int_{y=0}^{y=1} 2ye^{y^2}dy = e^{y^2}\Big|_{y=0}^{y=1} = e-1\end{aligned}$$



12.3 극좌표계에서의 이중적분

1. (a) $\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{4} r\cos\theta drd\theta$. 안쪽 적분 $= \frac{1}{3}r^3\cos\theta\Big|_{r=0}^{4} = \frac{64}{3}\cos\theta$. 바깥쪽 적분 $= \frac{64}{3}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{128}{3}$

   (b)

$$\begin{aligned}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{4}(r\cos\theta)(r\sin\theta)rdrd\theta &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{4} r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{1}{4}r^4\cos\theta\sin\theta\Big|_{r=0}^{4} d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi/2} 64\cos\theta\sin\theta d\theta = 64\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_{0}^{\pi/2} = 32\end{aligned}$$

   (c)

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\frac{1}{1+r^2}rdrd\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln 17 - \frac{1}{2}\ln 1\right)d\theta = \frac{\ln 17}{2}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{\ln 17}{2}\times 2\pi = \pi\ln 17$$

2.
$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\infty}e^{-r^2}rdrd\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\big|_0^{\infty}\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

3. 아랫쪽 경계는 x-축이고 위쪽 경계는 $x^2+y^2 = 9$의 반원이다. x의 양끝값은 -3과 3이다. 그러므로 $\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{3}\ln(1+r^2)rdrd\theta$이다. 안쪽 적분을 $u = 1+r^2$으로 두는 치환 적분을 하면 $\frac{1}{2}\int_1^{10}\ln udu = \frac{1}{2}(u\ln u - u)\big|_1^{10} = \frac{1}{2}(10\ln 10 - 9)$이고 바깥쪽 적분은 $\frac{1}{2}\pi(10\ln 10 - 9)$이다.

4. (a) $\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=3} 4$

   (b) $\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=2}^{\infty}$

   (c) 안쪽 경계는 $r=0$이고 바깥쪽 경계는 직선 $x+y=2$인데 극좌표계로 표현하면 $r\cos\theta + r\sin\theta = 2$, $r = 2/(\cos\theta+\sin\theta)$이다. 그러므로 $\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2/(\cos\theta+\sin\theta)}$

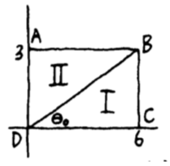
(d) 안쪽 경계는 $r=0$ 이고 바깥쪽 경계는 원 $(x-2)^2+y^2=4, x^2+y^2=4x, r^2=4r\cos\theta, r=4\cos\theta$ 이다. θ의 양 끝값은 $-\pi/2$와 $\pi/2$ 이므로 $\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{r=4\cos\theta}$

(e) $\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=5}^{\infty}$

(f) 안쪽 경계는 0이고 바깥쪽 경계는 두 개의 곡선, 선분 AB와 선분 BC로 이루어져 있다. (아래 그림 참조) 이 영역을 나눈다. 직선 AB의 방정식은 $y=3, r\sin\theta=3, r=\csc\theta$ 이다. 직선 BC의 방정식은 $x=6, r\cos\theta=6, r=6\sec\theta$ 이다.

$$\int_{\text{직사각형}} = \int_I + \int_{II} = \int_{\theta=0}^{\theta_0}\int_{r=0}^{6\sec\theta} + \int_{\theta=\theta_0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{3\csc\theta}$$

여기서 $\theta_0=\tan^{-1}\frac{1}{2}$.

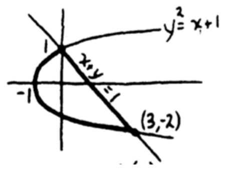


12.4 넓이와 부피

1. (a) 방법 2를 이용한다. 윗쪽 곡선은 직선과 포물선이므로 영역을 나눈다. 왼쪽 부분에서는 $u(x)=\sqrt{x+1}, l(x)=-\sqrt{x+1}$. 오른쪽 부분에서는 $u(x)=1-x, l(x)=-\sqrt{x+1}$ 이다.

$$\begin{aligned}
\text{넓이} &= \int_{-1}^{0}(\sqrt{x+1}-(-\sqrt{x+1}))dx + \int_{0}^{3}(1-x-(-\sqrt{x+1}))dx \\
&= 2\int_{-1}^{0}\sqrt{x+1}dx + \int_{0}^{3}(1-x+\sqrt{x+1})dx \\
&= 2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_{-1}^{0} + (x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_{0}^{3} = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

방법 3을 이용하면, 넓이 $=\int_{\text{영역}} dA = \int_{y=-2}^{y=1}\int_{x=y^2-1}^{1-y} dxdy = \cdots = \frac{9}{2}$.



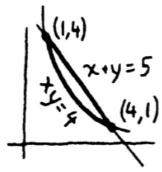
(b) 교점을 구하기 위해 $x(5-x)=4$를 풀면 $x=4,1$을 얻는다.

방법 2를 이용하면 $u(x)=5-x, l(x)=4/x$ 이므로

$$\text{넓이} = \int_{1}^{4}(5-x-4/x)dx = (5x-\frac{1}{2}x^2-4\ln x)\Big|_{1}^{4} = \frac{15}{2}-4\ln 4$$

방법 3을 이용하면

$$\text{넓이} = \int_{\text{영역}} dA = \int_{x=1}^{4}\int_{y=4/x}^{y=5-x} dydx = \int_{1}^{4}(5-x-4/x)dx = \frac{15}{2}-4\ln 4$$

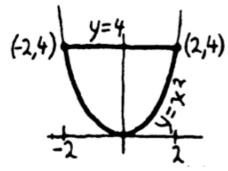


(c) 방법 2를 이용하면 $u(x) = 4, l(x) = x^2$ 이므로

$$넓이 = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = (4x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

방법 3을 이용하면

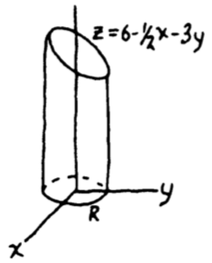
$$넓이 = \int_{영역} dA = \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=x^2}^{y=4} dydx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \frac{32}{3}$$



(d) 방법 3을 이용하면

$$넓이 = \int_{영역} dA = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\theta} rdrd\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2}\theta^2 d\theta = \frac{1}{6}\theta^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3$$

2. (a) 입체는 $f(x, y) = 6 - \frac{1}{2}x - 3y$ 의 그래프 아래와 반지름이 2인 원 영역 R 위의 공간으로 만들어지므로 부피 $= \displaystyle\int_R \left(6 - \frac{1}{2}x - 3y\right) dA = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \left(6 - \frac{1}{2}r\cos\theta - 3r\sin\theta\right) rdrd\theta$ 이다. 안쪽 적분 $= (3r^2 - \frac{1}{6}r^3\cos\theta - r^3\sin\theta)\big|_0^2 = 12 - \frac{4}{3}\cos\theta - 8\sin\theta$ 이다. 바깥쪽 적분 $= \int_0^{2\pi} 12d\theta - \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta - 8\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 24\pi + 0 + 0 = 24\pi$.



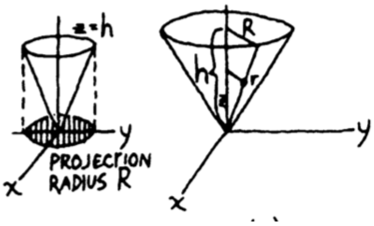
(b) 위쪽 반구의 부피를 구한 다음 2배를 한다. 구의 방정식은 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 이고 반구 형태의 입체는 $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 그래프의 아래와 x, y 평면 위에서 반지름이 R 인 원영역 위의 공간으로 만들어지므로 반구의 부피 $= \displaystyle\int_{원영역} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dA = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \sqrt{R^2 - r^2} rdrd\theta$, 안쪽 적분 $= -\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2}\big|_{r=0}^{R} = \frac{1}{3}R^3$, 바깥쪽 적분 $= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{3}R^3 d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3}R^3$. 따라서 구의 부피 $= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

방법 2를 이용하면 $u(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}, l(x,y) = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 구의 부피 $= \int_{\text{xy 평면으로의 정사영}} (u(x,y)-l(x,y))dA = \int_{\text{원영역}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dA$ 등

(c) 위쪽 반의 부피를 구한 다음 2배를 한다. 입체는 구 $x^2+y^2+z^2 = 36$, 즉 $f(x,y) = \sqrt{36-x^2-y^2}$의 그래프 아래와 반지름이 3인 원 영역 위의 공간으로 만들어진다. 부피 $= 2\int_R \sqrt{36-x^2-y^2}dA = 2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3}\sqrt{36-r^2}rdrd\theta$. 안쪽 적분 $= -\frac{1}{3}(36-r^2)^{3/2}\big|_0^3 = \frac{1}{3}(216-27^{3/2})$. 바깥쪽 적분 $= 2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}(216-27^{3/2})$

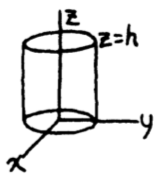
(d) 방법 2를 이용하면, 위쪽 곡면은 $z = h$이고 아랫쪽 곡면은 원뿔이다. xy-평면 위로의 정사영은 반지름이 R인 원 영역이다. 극좌표를 사용할 것이므로 원뿔의 방정식을 $z, r\theta$로 표현해야 한다. 닮음 삼각형에 의해 $z/h = r/R$이므로 $z = rh/R$이다.

$$
\begin{aligned}
\text{부피} &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}(h-rh/R)rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}hr^2-\frac{1}{3}hr^3/R\right)\Big|_{r=0}^{R}d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{6}hR^2d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{6}hR^2 = \frac{1}{3}\pi R^2h
\end{aligned}
$$



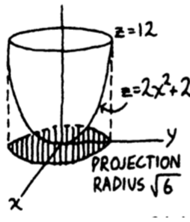
(e) 입체는 $f(x,y) = h$의 그래프 아래와 반지름 R인 원 영역 위의 공간으로 만들어진다.

$$
\begin{aligned}
\text{부피} &= \int_{\text{원영역}} hdA = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}hrdrd\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{2}hr^2\Big|_{r=0}^{R}d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{2}hR^2d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2}hR^2 = \pi R^2h
\end{aligned}
$$



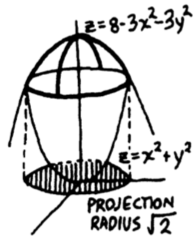
3. (a) 평면과 포물면의 교선은 $2x^2+2y^2 = 12$이므로 정사영은 $x^2+y^2 = 6$이다 (아래 그림 참조)

$$
\text{부피} = \int_{\text{정사영}}[12-(2x^2+2y^2)]dA = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{6}}(12-2r^2)rdrd\theta
$$



(b) 방법 2를 이용한다. 정사영을 얻기 위해 $8 - 3x^2 - 3y^2 = x^2 + y^2$ 를 이용하면 $x^2 + y^2 = 2$ 이다.

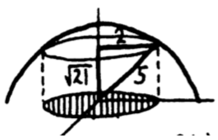
$$\text{부피} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}}(8 - 4r^2)rdrd\theta$$



(c) 방법 2를 이용한다. 윗쪽 곡면은 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 이므로 $u(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ 이고 아랫쪽 곡면은 평면 $z = \sqrt{21}$ 이다. 정사영은 반지름이 2인 원영역이다.

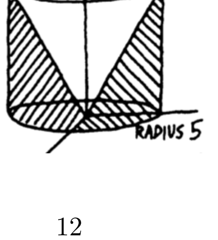
$$\text{부피} = \int_{\text{정사영}}(\sqrt{25 - x^2 - y^2} - \sqrt{21})dA = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(\sqrt{25 - r^2} - \sqrt{21})rdrd\theta$$

또는 "반쪽 과심부"의 부피를 구하고 반지름이 2이고 높이가 $\sqrt{21}$ 인 원기둥의 부피를 뺀다. (위의 이중적분 식이 사실은 이러한 계산을 하고 있다.)



4. 입체의 반은 원기둥 $x^2+z^2 = 9$, 즉 $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2}$ 의 아래와 xy-평면에서 반지름이 3인 원영역 위 사이의 공간으로 만들어진다. 따라서 $\frac{1}{2}$부피 $= \int_R \sqrt{9 - x^2}dA = \int_{x=-3}^{x=3}\int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{y=\sqrt{9-x^2}}\sqrt{9 - x^2}dydx$ 이다. 안쪽 적분 $= \sqrt{9 - x^2}(\sqrt{9 - x^2} - (-\sqrt{9 - x^2})) = 2(9 - x^2)$ 이고 바깥쪽 적분 $= 2\int_{-3}^{3}(9 - x^2)dx = \cdots = 72$ 이다. 따라서 총 부피는 $= 2 \times 72 = 144$

5. 적분의 값은 바닥 R과 덮개 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 으로 만들어지는 입체의 부피이다. (적분 값은 원뿔 내부의 부피가 아님에 주의한다. 왜냐하면 입체의 부피는 원뿔의 위가 아니고 아래쪽이기 때문이다)



12.5 이중적분의 추가 응용

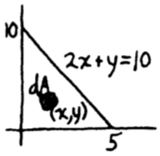
1. (a) (x,y)로부터 더 긴 변까지의 거리는 x이다. 영역내에서 x의 평균값 $= \dfrac{\int_{\text{영역}} xdA}{\text{넓이}(=25)}$ 이고 분자는

$$\int_{\text{영역}} xdA = \int_{x=0}^{5}\int_{y=0}^{10-2x} xdydx = \int_0^5 x(10-2x)dx = (5x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^5 = \frac{125}{3}$$

그러므로 평균값은 $= \frac{1}{25} \times \frac{125}{3} = \frac{5}{3}$

(b) 각 변까지의 거리를 x와 y이므로 d질량 $=$ 질량 밀도 $\times$ 넓이 $= xydA$이고,

$$\begin{aligned}\text{총무게} &= \int_{\text{영역}} xydA = \int_{x=0}^{5}\int_{y=0}^{10-2x} xydydx \\ &= \int_0^5 \frac{1}{2}xy^2\Big|_{y=0}^{10-2x} dx = \int_0^5 \frac{1}{2}x(10-2x)^2 dx \\ &= \int_0^5 \frac{1}{2}(100x - 40x^2 + 4x^3)dx = (25x^2 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4)\Big|_0^5 = \frac{625}{6}\end{aligned}$$

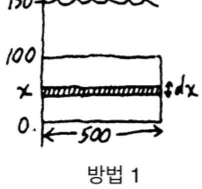


2. (방법 1) 사막으로부터 $150-x$ 만큼 떨어진 띠에 쌓이는 모래를 생각하자. 넓이는 $500dx$이고 이 띠에서의 모래 밀도는 $1/(150-x)$이므로 d모래 $=$ 밀도 $\times$ 넓이 $= \dfrac{500dx}{150-x}$ 이다. 그러면

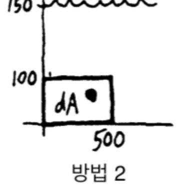
$$\begin{aligned}\text{총 모래량} &= \int_0^{100} \frac{500dx}{150-x} = -500\ln(150-x)\Big|_0^{100} \\ &= -500(\ln 50 - \ln 150) = 500\ln 3\end{aligned}$$

(방법 2) 넓이가 dA이고 점 (x,y)를 포함하는 작은 부분영역을 생각하자. 이 점에서 사막까지의 거리는 $150-y$이므로 d모래 $= dA/(150-y)$이다.

$$\begin{aligned}\text{총 모래량} &= \int_{\text{마을}} \frac{1}{150-y}dA = \int_{y=0}^{100}\int_{x=0}^{500} \frac{1}{150-y}dxdy \\ &= \int_0^{100} \frac{500}{150-y}dy = \cdots = 500\ln 3\end{aligned}$$



방법 1



방법 2

3. (방법 1) 극좌표계로 r,θ의 좌표를 가지고 넓이가 dA인 작은 부분영역을 생각하자. 그러면 d

물 = 밀도 × 넓이 = $r^3 dA$ 이므로

$$\text{총 물의 양} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{6} r^3 r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{5} r^5\Big|_{r=0}^{6} d\theta = \frac{6^5}{5}\pi$$

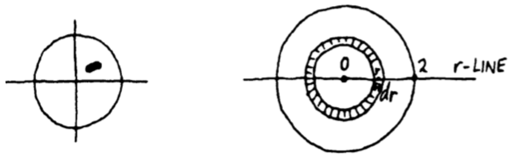
(방법 2) 반지름이 r 이고 두께가 dr 인 반고리 형태를 생각하자. 넓이는 $\pi r dr$ 이고 밀도는 r^3 이므로 d물 $= r^3 \pi r dr = \pi r^4 dr$ 이다. 총 물의 양 $= \int_0^6 \pi r^4 dr = 6^5\pi/5$

방법 1　　방법 2

4. (a) (방법 1) 점 r, θ 를 포함하는 면적 dA 인 작은 부분영역을 생각하자. 그러면 d비용 $= rdA$ 이고

$$\text{총 비용} = \int_{\text{땅}} rdA = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} rrdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r^2 drd\theta$$

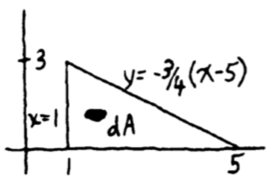
(방법 2) 반지름이 r 이고 두께가 dr 인 원형 고리를 생각하자. 그러면 고리에서의 밀도는 r 이고 넓이는 $2\pi r dr$, d비용 $= r \cdot 2\pi r dr = 2\pi r^2 dr$, 총 비용 $= \int_{r=0}^{2} 2\pi r^2 dr$



방법 1　　방법 2

(b) 점 (x, y) 를 포함하는 넓이 dA 인 작은 부분영역을 생각하자. d비용 $= \sqrt{x^2+y^2}dA$ 이고

$$\text{비용} = \int_{\text{땅}} \sqrt{x^2+y^2}dydx = \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=0}^{-3(x-5)/4} \sqrt{x^2+y^2}dydx$$

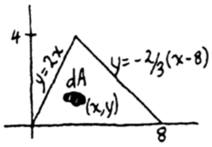


5. (a) 넓이가 dA 이고 점 (x, y) 를 포함하는 작은 부분영역에 살고 있는 작은 수의 인구 (즉 d 인구)

(b) $f(x, y)$ 는 단위 넓이당 인구수, 즉 인구밀도이다. 만일 $f(2, 3) = 8$ 이라고 하면, 이것은 점 (2,3) 에 8명의 인구가 살고 있다는 의미가 아니다. 이것은 (2,3) 에서의 인구 밀도가 (예를 들면) 제곱 킬로미터당 8명이라는 의미다.

6. 면적이 dA 이고 점 (x, y) 를 포함하는 작은 부분영역을 생각하자. 밀도는 제곱 킬로미터당 $f(x, y)$ 명이므로 이 작은 영역의 사람수는 $f(x, y)dA$ 이고 d 발병수 $= \dfrac{f(x, y)dA}{\sqrt{(x-8)^2 + y^2}}$ 이고

$$\text{총 발병수 } = \int_{\text{영역}} \frac{f(x, y)dA}{\sqrt{(x-8)^2 + y^2}} = \int_{y=0}^{4} \int_{x=y/2}^{x=8-3y/2} \frac{f(x, y)dA}{\sqrt{(x-8)^2 + y^2}} dxdy$$

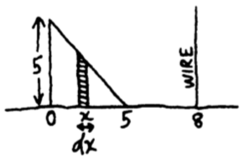


7. (방법 1) 하나의 띠를 생각하자. 닮음 삼각형으로부터 $\dfrac{\text{띠의 높이}}{5-x} = \dfrac{5}{5}$, 그러므로 띠의 높이 $=$ $5 - x$ 이고 띠의 넓이 $= (5-x)dx$, d 열 $= \dfrac{(5-x)dx}{8-x}$ 이다.

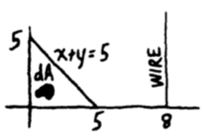
$$\text{총 열 } = \int_0^5 \frac{5-x}{8-x} dx = \int_0^5 \left(1 - \frac{3}{8-x}\right) dx = (x + 3\ln(8-x))\Big|_0^5 = 5 + 3\ln 3 - 3\ln 8$$

(방법 2) 점 (x, y) 를 포함하는 면적이 dA 인 작은 부분영역을 생각하자. d 열 $= \dfrac{dA}{8-x}$ 이고

$$\text{총 열 } = \int_{\text{영역}} \frac{dA}{8-x} = \int_{x=0}^{x=5} \int_{y=0}^{y=5-x} \frac{1}{8-x} dydx = \int_0^5 \frac{5-x}{8-x} dx = \cdots = 5 + 3\ln 3 - 3\ln 8$$



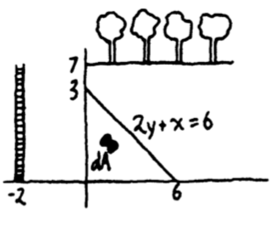
방법 1



방법 2

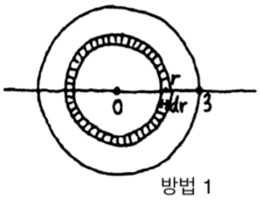
8. 점 (x, y) 를 포함하는 면적이 dA 인 작은 부분영역을 생각하자. 기찻길까지의 거리는 $x+2$ 이고 가로수길 까지의 거리는 $7 - y$ 이다. 따라서 d 가격 $= \dfrac{x+2}{7-y} dA$

$$\text{토지 가격 } = \int_{\text{토지}} \frac{x+2}{7-y} dA = \int_{x=0}^{x=6} \int_{y=0}^{(6-x)/2} \frac{x+2}{7-y} dydx$$



9. (a) (방법 1) 반지름이 r 이고 두께가 dr 인 원형 고리를 생각하자. 넓이는 $2\pi r dr$ 이고 d 에너지 $= 2\pi r dr/r = 2\pi dr$ 이므로 총 에너지 $= \int_0^3 2\pi dr = 6\pi$

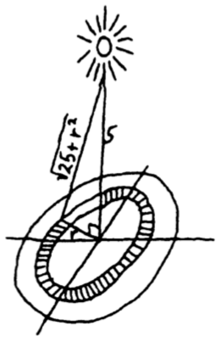
(방법 2) 점 r, θ 를 포함하고 넓이가 dA 인 작은 부분영역을 생각하자. d 에너지 $= dA/r$ 이므로 총 에너지 $= \displaystyle\int_{\text{영역}} (1/r)dA = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3} (1/r) r dr d\theta = 6\pi$

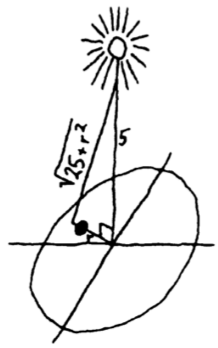


방법 1


방법 2

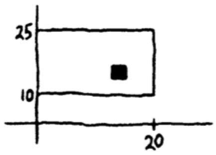
(b) (a) 에서와 마찬가지이지만 이번에는 열원까지의 거리가 r 이 아니고 $\sqrt{25+r^2}$ 이다. 그러므로 열 $= \displaystyle\int_0^3 \frac{2\pi r dr}{\sqrt{25+r^2}}$, 또한 $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3} \frac{1}{\sqrt{25+r^2}} r dr d\theta$ 이다.





10. 점 (x, y) 를 포함하는 면적이 dA 인 작은 부분영역을 생각하자. 지상으로부터의 높이는 y 이고 사다리까지의 거리는 x 이므로 d 비용 $= xy^2 dA$ 이고

$$\text{비용} = \int_{x=0}^{20}\int_{y=10}^{25} xy^2 dy dx = \frac{1}{3}(25^3 - 1000)\int_0^{20} x dx = \frac{200}{3}(25^3 - 1000)$$



12.6 삼중적분

1. (a) 아랫면은 평면 $z = 0$ 이고 윗면은 $z = 1$ 이다. xy-평면으로의 정사영을 이용한다.

$$\int x^2 dV = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{y=1-x}\int_{z=0}^{2} x^2 dz dy dx$$

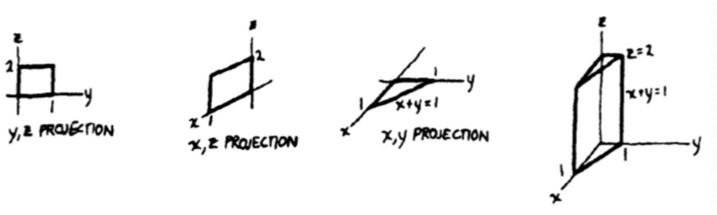
왼쪽 경계는 평면 $y = 0$ 이고 오른쪽 경계는 $x + y = 1$ 이다. xz-평면으로의 정사영을 이용한다.

$$\int x^2 dV = \int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{1-x} x^2 dy dz dx$$

뒷쪽 경계는 평면 $x = 0$ 이고 앞쪽 경계는 평면 $x + y = 1$ 이다. yz-평면으로의 정사영을 이용한다.

$$\int x^2 dV = \int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1-y} x^2 dx dy dz$$

어느 경우나 답은 1/6.



(b) 아랫면은 평면 $z = 0$ 이고 윗면은 $z = 5$ 이다. xy-평면으로의 정사영을 이용한다.

$$\int x^2 z dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=0}^{5} r^2 \cos^2\theta \cdot z \cdot r dz dr d\theta$$

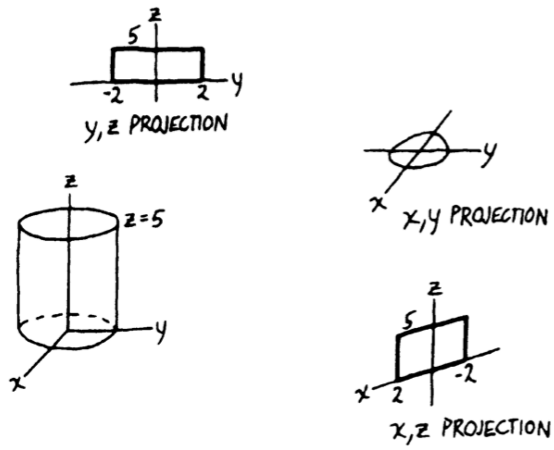
왼쪽 경계와 오른쪽 경계는 원기둥이다. xz-평면으로의 정사영을 이용한다.

$$\int x^2 z dV = \int_{z=0}^{5} \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} x^2 z dy dx dz$$

또한

$$\int x^2 z dV = \int_{z=0}^{5} \int_{y=-2}^{2} \int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} x^2 z dx dy dz$$

어느 경우에나 답은 50π



2. (a) 아랫면은 평면 $z = 0$ 이고 윗면은 방정식이 $x/2 + y/3 + z/4 = 1, z = \frac{1}{3}(12 - 6x - 4y)$ 로 주어지는 평면 ABC 이다. xy-평면으로의 정사영을 이용한다. 직선 BC는 $x/2 + y/3 = 1, 3x + 2y = 6$ 이다.

$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{(6-3x)/2} \int_{z=0}^{z=(12-6x-4y)/3} f(x, y, z) dz dy dx$$

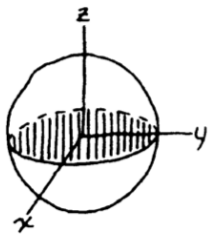
또한, 뒷쪽 경계는 평면 $x = 0$ 이고 앞쪽 경계는 ABC 이다. yz-평면으로의 정사영을 이용한다. 직선 AB의 방정식은 $y/3 + z/4 = 1$ 이다.

$$\int_{y=0}^{3} \int_{z=0}^{z=(12-4y)/3} \int_{x=0}^{x=(12-4y-3z)/6} f(x, y, z) dx dz dy$$

(b) 극좌표와 z를 사용할 수 있다. 아랫면은 아랫쪽 반구인 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = -\sqrt{R^2 - r^2}$

이고 윗면은 $z = \sqrt{R^2 - r^2}$ 이다. xy-평면으로의 정사영은 반지름이 R 인 원영역이다.

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{z=-\sqrt{R^2-r^2}}^{z=\sqrt{R^2-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta$$

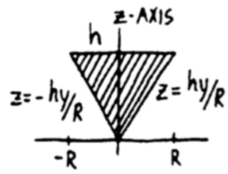


(c) (예제 12-15)를 참조한다.

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{z=rh/R}^{z=h} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta$$

또한 yz-평면으로 정사영시킬 수도 있다. 원뿔의 방정식은 $z = \dfrac{rh}{R} = \dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 이므로 $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$. 뒷쪽 경계는 $x = -\sqrt{R^2z^2/h^2 - y^2}$ 이고 앞쪽 경계는 $x = \sqrt{R^2z^2/h^2 - y^2}$ 이다.

$$\int_{z=0}^{h} \int_{y=-Rz/h}^{y=Rz/h} \int_{x=-\sqrt{R^2z^2/h^2-y^2}}^{x=\sqrt{R^2z^2/h^2-y^2}} f(x,y,z) dx dy dz$$

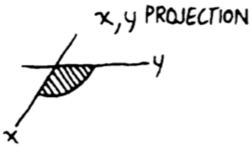


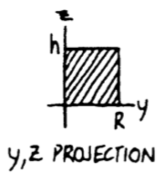
(d) 아랫면은 평면 $z = 0$ 이고 윗면은 평면 $z = h$ 이다. xy-평면으로의 정사영을 이용한다.

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{R} \int_{z=0}^{h} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta$$

또한 뒷쪽 경계는 평면 $x = 0$ 이고 앞쪽 경계는 $x = \sqrt{R^2 - y^2}$. yz-평면으로의 정사영을 이용하면

$$\int_{z=0}^{h} \int_{y=0}^{R} \int_{x=0}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y,z) dx dy dz$$





(e) 윗면은 명확하지 않다 (두 곡면이 포함되어 있다). 대신 뒷쪽 경계는 평면 $x = 0$ 이고 앞쪽 경계는 원기둥 $x^2 + y^2 = 9, x = \sqrt{9 - z^2}$ 이다. yz-평면으로의 정사영에 극좌표를 사용할

수 있다. 즉 $y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$.

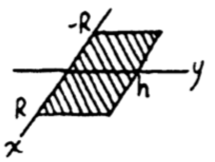
$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{3}\int_{x=0}^{x=\sqrt{9-r^2\sin^2\theta}} f(x, r\cos\theta, r\sin\theta)rdxdrd\theta$$

(f) 왼쪽 경계는 평면 $y = 0$ 이고 오른쪽 경계는 평면 $y = h$ 이다. xz-평면으로의 정사영에 극좌표를 사용하면 $x = r\cos\theta, z = r\sin\theta$ 이다.

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{y=0}^{h} f(r\cos\theta, y, r\sin\theta)rdydrd\theta$$

또한 아랫면은 원기둥 $x^2 + z^2 = R^2$ 의 아랫쪽 반인 $z = -\sqrt{R^2 - x^2}$ 이고 윗면은 윗쪽 반인 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ 이다. xy-평면으로의 정사영을 이용한다.

$$\int_{y=0}^{h}\int_{x=-R}^{R}\int_{z=-\sqrt{R^2-x^2}}^{z=\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y, z)dzdxdy$$

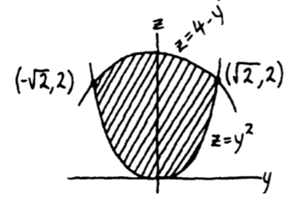


(g) 12.4절의 예제를 참조한다. 아랫면은 $z = 2x^2 + y^2$ 이고 윗면은 $z = 4 - y^2$ 이다. 정사영에 극좌표계를 사용하면

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}}\int_{z=2r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}^{z=4-r^2\sin^2\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdzdrd\theta$$

또한 뒷쪽 경계와 앞쪽 경계는 모두 $z = 2x^2 + y^2$ 이고 yz-평면으로의 정사영을 이용하면

$$\int_{y=-\sqrt{2}}^{y=\sqrt{2}}\int_{z=y^2}^{z=4-y^2}\int_{x=-\sqrt{(z-y^2)/2}}^{\sqrt{(z-y^2)/2}} f(x, y, z)dxdzdy$$



(h) 아랫면은 $z = x^2$ 이고 윗면은 $z = 5$ 이다. xy-정사영을 이용하면

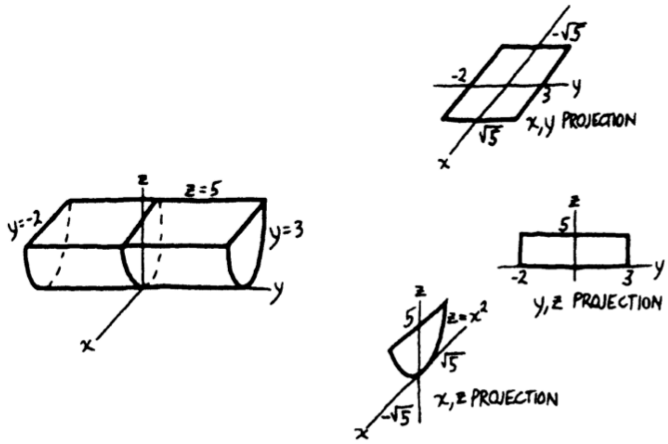
$$\int_{x=-\sqrt{5}}^{x=\sqrt{5}}\int_{y=-2}^{3}\int_{z=x^2}^{z=5} f(x, y, z)dzdydx$$

또한 뒷쪽 경계와 앞쪽 경계는 모두 $z = x^2$ 이고 yz-정사영을 이용하면

$$\int_{y=-2}^{3} \int_{z=0}^{5} \int_{x=-\sqrt{z}}^{x=\sqrt{z}} f(x,y,z)dxdzdy$$

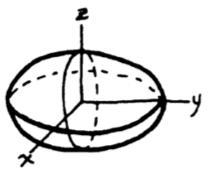
또한 왼쪽 경계는 평면 $y = -2$ 이고 오른쪽 경계는 평면 $y = 3$. xz-정사영을 이용하면

$$\int_{x=-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{z=x^2}^{z=5} \int_{y=-2}^{y=3} f(x,y,z)dydzdx$$



(i) 아랫면과 윗면은 모두 타원면이고 xy-평면으로의 정사영은 타원 $x^2 + 2y^2 = 12$ 로 둘러싸인 영역이다.

$$\int_{y=-\sqrt{6}}^{y=\sqrt{6}} \int_{x=-\sqrt{12-2y^2}}^{\sqrt{12-2y^2}} \int_{z=-\sqrt{(12-x^2-2y^2)/3}}^{\sqrt{(12-x^2-2y^2)/3}} f(x,y,z)dzdxdy$$



(j) 아랫면은 평면 $z = 0$ 이고 윗면은 평면 $z = x$ 이다. xy-평면으로의 정사영을 이용하면

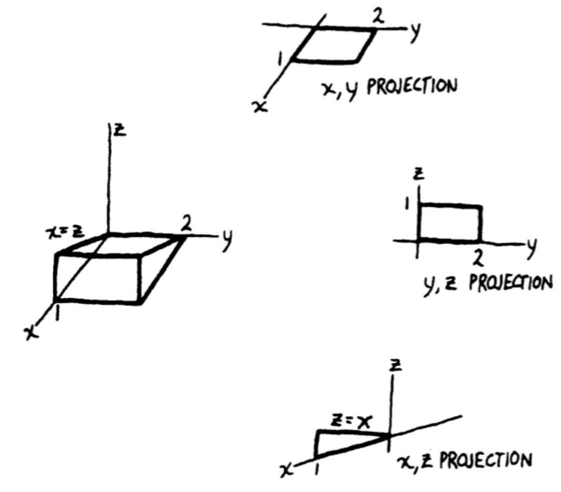
$$\int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{z=x} f(x,y,z)dzdxdy$$

또한 뒷쪽 경계는 평면 $x = z$ 이고 앞쪽 경계는 평면 $x = 1$ 이므로

$$\int_{z=0}^{1} \int_{y=0}^{2} \int_{x=z}^{1} f(x,y,z)dxdydz$$

또한 왼쪽 경계는 평면 $y = 0$ 이고 오른쪽 경계는 평면 $y = 2$ 이므로

$$\int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{z=x} \int_{y=0}^{y=2} f(x,y,z)dydzdx$$

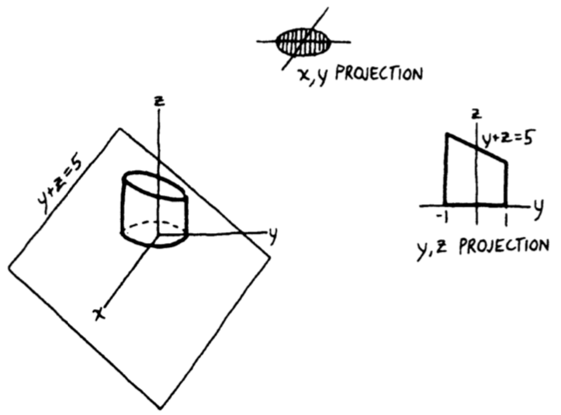


(k) 아랫면은 평면 $z = 0$ 이고 윗면은 평면 $y + z = 5$. xy-정사영에 대해 극좌표를 이용할 수 있다.

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{z=5-r\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdzdrd\theta$$

또한 뒷쪽 경계와 앞쪽 경계는 모두 원기둥 $x^2 + y^2 = 1$ 이다.

$$\int_{y=-1}^{1}\int_{z=0}^{z=5-y}\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y, z)dxdzdy$$



(l) 아랫면은 평면 $z = 0$ 이고 윗면은 평면 $z = x$ 이다. xy-정사영에 극좌표를 이용할 수 있다.

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{r\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdzdrd\theta$$

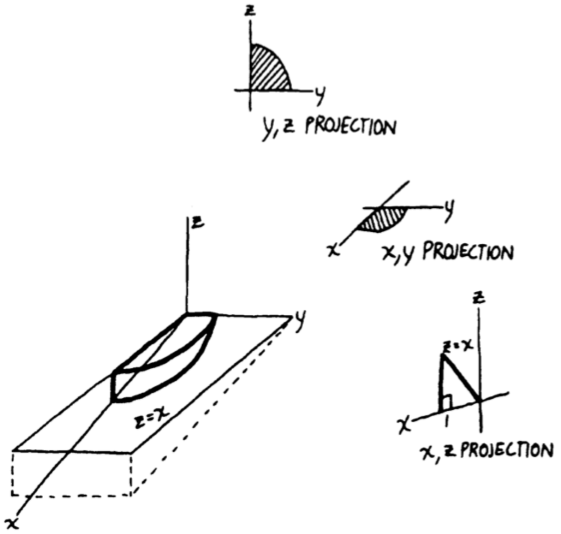
또한 왼쪽 경계는 평면 $y = 0$ 이고 오른쪽 경계는 $x^2 + y^2 = 1$ 이다.

$$\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{x}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z)dydzdx$$

뒷쪽 경계는 평면 $z = x$ 이고 앞쪽 경계는 원기둥이다. yz-평면위로의 정사영은 명확하지 않다. 평면과 원기둥의 교선은 $z^2 = 1 - y^2$ 이므로 정사영은 원 $y^2 + z^2 = 1$ 로 둘러싸인

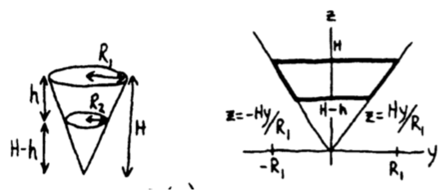
영역이다. $y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$ 로 두고 극좌표를 사용할 수 있다.

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1}\int_{x=z=r\sin\theta}^{x=\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}} f(x, r\cos\theta, r\sin\theta) r dx dr d\theta$$



(m) 원뿔의 높이를 H 라 하자. 그러면 $\dfrac{H}{R_1} = \dfrac{H-h}{R_2}$, $H = \dfrac{R_1 h}{R_1 - R_2}$ 이다. 원기둥 좌표계로 원뿔의 방정식은 $z = rH/R_1$ 이고 직교좌표계에서는 $z^2 = \dfrac{H^2}{R_1^2}(x^2+y^2)$ 이다. 아랫면은 두 개의 곡면, 평면 $z = H-h$ 와 원뿔이므로 이 방식으로 할 때에는 입체를 나누어야 한다. 대신 뒷쪽 경계와 앞쪽 경계는 모두 원뿔면이다. yz-평면으로의 정사영을 이용한다.

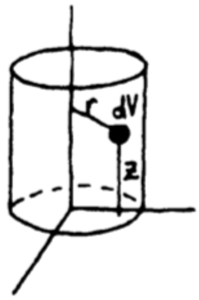
$$\int_{z=H-h}^{z=H}\int_{y=-R_1 z/H}^{y=R_1 z/H}\int_{x=-\sqrt{R_1^2 z^2/H^2-y^2}}^{z=\sqrt{R_1^2 z^2/H^2-y^2}} f(x,y,z) dx dy dz$$



3. (a) 원기둥 좌표계를 이용한다. 점 r, θ, z 에서 부피가 dV 인 작은 부분영역을 생각하자.

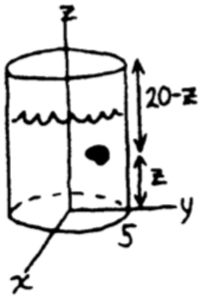
(i) 부분영역에서 밀도는 r, d질량$= rdV$, 질량$= \int_{\text{원통}} rdV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{h} rr dz dr d\theta = \dfrac{2}{3}\pi R^3 h$

(ii) 밀도는 z, d질량 $= zdV$, 질량 $= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{h} zr dz dr d\theta = \dfrac{1}{2}\pi h^2 R^2$



(b) 점 r, θ, z 에서 부피가 dV 인 얇은 액체 조각을 생각하자. 이 얇은 조각의 무게는 $20dV$ 이고 $20 - z$ 만큼 들어올려야 한다. 그러므로 d 일 $= (20 - z) \cdot 20dV = (400 - 20z)dV$,

$$\text{총 일} = \int_{\text{원기둥반}} (400 - 20z)dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{5} \int_{h=0}^{10} (400 - 20z)rdzdrd\theta = 75000\pi$$

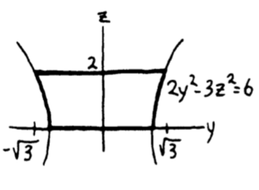


(c) 부피는 $\int_{\text{입체}} dV$ 이다. 아랫면은 $z = 2x^2 + 2y^2$ 이고 윗면은 $z = 12$ 이다. 두 면의 교선은 $2x^2 + 2y^2 = 12, x^2 + y^2 = 6$ 이고 xy-정사영은 반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원영역이다. 극좌표계를 사용하면

$$\text{부피} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{6}} \int_{z=2r^2}^{12} rdzdrd\theta$$

4. 부피는 $\int_{\text{입체}} dV$ 이다. 아랫면은 두 개의 곡면인 평면 $z = 0$ 와 쌍곡면이다. 그러나 이 버전은 사용하지는 말라. 뒷쪽 경계와 앞쪽 경계는 모두 쌍곡면이다. yz-정사영을 이용하면 부피는

$$\int_{\text{영역}} dV = \int_{z=0}^{2} \int_{y=-\sqrt{(6+3z^2)/2}}^{y=\sqrt{(6+3z^2)/2}} \int_{x=-\sqrt{6+3z^2-2y^2}}^{x=\sqrt{6+3z^2-2y^2}} dxdydz$$



5. 반드시 그렇지는 않다. 그러는지 아닌지는 f 에 따라 다르다. 만일 빠진 쪽 반구에서의 f 의 값이 사용되는 반구에서의 f 의 값과 매치가 된다면 식은 성립한다. 하지만 그렇지 않은 경우에는 식이 성립하지 않는다. 다시 말하면 $f(x, y, z)dV$ 형태의 항을 100개 더한 것은 나머지 50개가 처음 50개와 매치가 되지 않는다면, 처음 50개의 항을 더한 것의 2배가 되지 않는다. 예를 들어 중심이 원점인 구에서 $\int_{\text{전체 구}} zdV$ 는 0이지만 $2\int_{\text{윗쪽 반구}} zdV$ 는 0이 아니다.

12.7 구면좌표계에서의 삼중적분

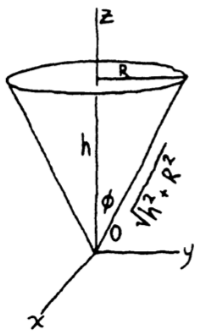
1. 부피 $= \int_{구} dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{R} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta.$

$$\text{안쪽 적분 } = \frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^R = \frac{1}{3}R^3,\ \text{가운데 적분 } = -\frac{1}{3}R^3\cos\phi\Big|_0^\pi = \frac{2}{3}R^3$$
$$\text{바깥쪽 적분 } = \frac{2}{3}R^3 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2. (아래 그림 참조) 부피 $= \int_{원뿔} dV$. 안쪽 경계는 $\rho = 0$ 이고 바깥쪽 경계는 평면 $z = h$, $\rho\cos\phi = h$, $\rho = h/\cos\phi$ 이므로

$$\text{부피 } = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi_0} \int_{\rho=0}^{h/\cos\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

안쪽 적분 $= \frac{1}{3}\rho^3\Big|_{\rho=0}^{h} = \frac{h^3}{3\cos^3\phi}$, 가운데 적분 $= \frac{1}{3}h^3 \int_{\phi=0}^{\phi_0} \frac{\sin\phi}{\cos^3\phi} d\phi = \frac{1}{3}h^3 \frac{1}{2\cos^2\phi}\Big|_{\phi=0}^{\phi_0} = \frac{1}{6}h^3\left(\frac{1}{\cos^2\phi_0} - 1\right)$. 직각 삼각형으로부터 $\cos\phi_0 = \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}$ 이므로 가운데 적분 $= \frac{1}{6}h^3\left(\frac{h^2+R^2}{h^2} - 1\right) = \frac{1}{6}R^2h$. 바깥쪽 적분 $= \frac{1}{6}R^2h \cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi R^2 h$



3. 원점을 구의 중심이라고 하자. 밀도가 $1/\rho^2$ 이므로

$$\text{질량 } = \int (1/\rho^2) dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{R} (1/\rho^2)\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = 4\pi R$$

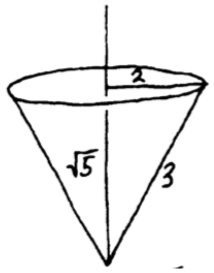
4. (a) (그림 12-51) 에서와 같고 "반지름" $\rho_0 = \infty$, 즉 $\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{\infty}$

   (b) $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{\infty}$

   (c) $\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{\infty}$

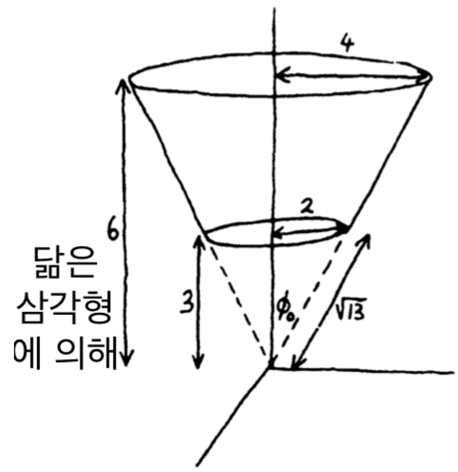
5. (아래 그림 참조)

$$\begin{aligned}
\text{부피 } &= \int dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi_0}\int_{\rho=0}^{3}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
\text{안쪽 적분 } &= \frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^3 = 9,\ \text{ 가운데 적분 } = -9\cos\phi\Big|_{\phi=0}^{\phi_0} = 9(1-\cos\phi_0) = 9\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right) \\
\text{바깥쪽 적분 } &= 18\pi\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$



6. (아래 그림 참조) 안쪽 경계는 $z = 3, \rho\cos\phi = 3$, $\rho = 3/\cos\phi$, 바깥쪽 경계는 $\rho = 6/\cos\phi$. 작은 조각의 질량은 $(1/\rho)dV$ 이므로 총 질량은

$$\begin{aligned}
\int(1/\rho)dV &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi_0}\int_{\rho=3/\cos\phi}^{6/\cos\phi}(1/\rho)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
\text{안쪽 적분 } &= \frac{27}{2\cos^2\phi},\ \text{ 가운데 적분 } = \frac{27}{2}\left(\frac{1}{\cos\phi_0}-1\right) = \frac{27}{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt{13}-1\right) \\
\text{바깥쪽 적분 } &= 27\pi\left(\frac{1}{3}\sqrt{13}-1\right)
\end{aligned}$$

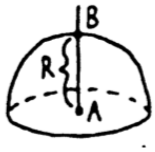


12.8 질량 중심

1. 물리적인 것을 고려했을 때, 중심은 선분 AB위에 있다. (아래 그림 참조) AB가 z-축이 되도록 축을 넣으면 반구의 부피 $= \frac{2}{3}\pi R^3$ 이고

$$\int zdV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{R}\rho\cos\phi\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{1}{4}\pi R^4$$

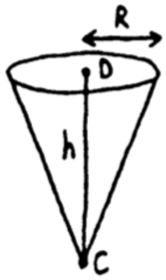
그러므로 $\overline{z} = \dfrac{\int zdV}{\text{부피}} = \frac{3}{8}R$. 즉 중심은 A로부터 B까지의 선분 위 $\frac{3}{8}$ 지점에 위치한다.



2. (a) 중심은 선분 CD 위에 있다. (아래 그림 참조) CD가 z-축이 되도록 축을 넣으면 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ 이고

$$\int zdV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{z=rh/R}^{h} zrdzdrd\theta = \frac{1}{4}\pi h^2 R^2$$

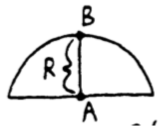
그러므로 $\overline{z} = \dfrac{\int zdV}{\text{부피}} = \frac{3}{4}h$. 즉 중심은 C로부터 D까지의 선분 위 $\frac{3}{4}$ 지점에 위치한다.



(b) 중심은 선분 AB 위에 있다. (아래 그림 참조) AB가 y-축이 되도록 축을 넣으면 반원의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi R^2$ 이고

$$\int ydA = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} r\sin\theta rdrd\theta = \frac{2}{3}R^3$$

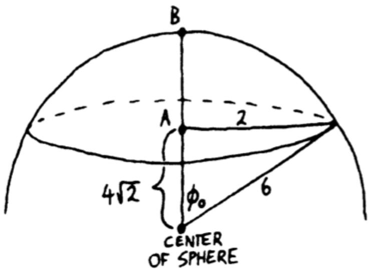
그러므로 $\overline{y} = \dfrac{\int ydA}{\text{넓이}} = \dfrac{4R}{3\pi}$ 즉 중심은 A로부터 B까지의 선분 위 $\frac{4}{3\pi}$ 지점에 위치한다.



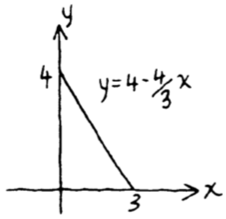
3. (a) 중심은 선분 AB 위에 있다. (아래 그림 참조) AB를 z-축으로 사용하면 $\overline{x} = \overline{y} = 0$ 이고 $\overline{z} = \dfrac{\int zdV}{\text{부피}}$ 이다. 여기서

$$\int zdV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi_0}\int_{\rho=4\sqrt{2}\sec\phi}^{\rho=6} \rho\cos\phi\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

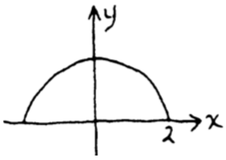
$$\text{부피} = \int dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi_0}\int_{\rho=4\sqrt{2}\sec\phi}^{\rho=6} \rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$



(b) (아래 그림 참조) $\overline{x} = \dfrac{\int xdA}{\text{넓이}} = \frac{1}{6}\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{4-4x/3} xdydx, \overline{y} = \dfrac{\int ydA}{\text{넓이}} = \frac{1}{6}\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{4-4x/3} ydydx$



4. (a) 아래 그림에 표시한 축을 이용하면 $\overline{x} = 0, \overline{y} = \dfrac{\int y \times \text{ 밀도}dA}{\int \times \text{밀도}dA} = \dfrac{\int_{\theta_0}^{\pi}\int_{r=0}^{2}(r\sin\theta)(r^2)rdrd\theta}{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{2} r^2 rdrd\theta}$



(b) 아래 그림에 표시한 축을 이용하면 $\overline{x} = \overline{y} = 0, \overline{z} = \dfrac{\int z \times \text{밀도}dV}{\int \text{밀도}dV}$. 각 적분에서 적분 구간은 $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{h}$ 이고 $dV = rdzdrd\theta$ 이다. 원기둥좌표계에서 점 r, θ, z 로 표시되는 원기둥체의 임의의 점 P에서 원기둥 윗면까지의 거리는 $h - z$ 이고 z-축까지의 거리는 r 이다. 그러므로 (i) 에서는 밀도가 $h - z$ 이고 (ii) 에서는 밀도가 r 이다.