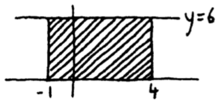
5장 적분
연습문제 해답

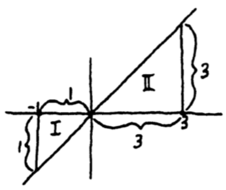
5.1 개요

5.2 적분의 정의와 응용

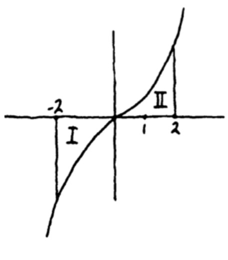
1. (a) $\int_{-1}^{4} 6dx =$ 그래프 아래의 넓이 $= 5 \times 6 = 30$



   (b) $\int_{-1}^{3} xdx =$ 넓이 II - 넓이 I $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$



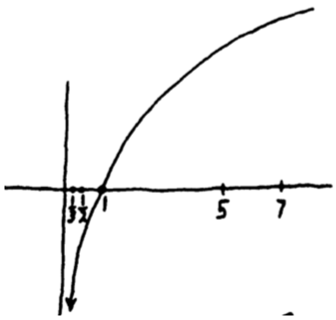
   (c) $\int_{-2}^{2} x^3 dx = II - I = 0$



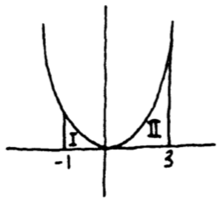
2. (a) $\int_{1}^{5} \ln x dx$

   (b) $-\int_{1/2}^{1} \ln x dx$

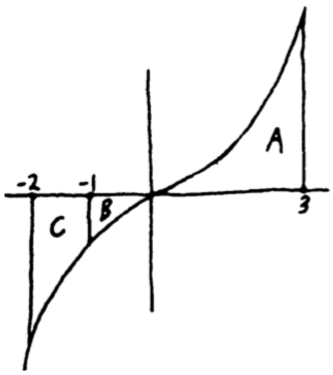
   (c) $\int_{1}^{7} \ln x dx - \int_{1/3}^{1} \ln x dx$



3. (a) $\int_0^3 x^2 dx = II$, $\int_{-1}^3 x^2 dx = I + II$ (더 큼)



   (b) $\int_0^3 x^3 dx = A$, $\int_{-1}^3 x^3 dx = A - B$ (더 작음)

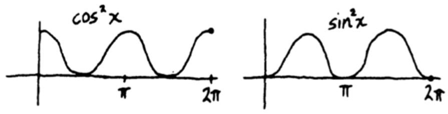


   (c) (위 그림 참고) $\int_{-1}^0 x^3 dx = -B$, $\int_{-2}^0 x^3 dx = -(C + B)$ (더 작음)

4. (a) 위보다 아래 넓이가 더 크다. 따라서 음수
   (b) $\cos^2 x$ 는 항상 ≥ 0 이므로 그래프는 x-축 위에 놓여 있다. 따라서 적분값은 양수여야 한다.

5. (a) 참 (그래프가 x-축 아래에 놓여 있는 경우를 생각해보라. 적분값 = - 넓이 = 음수)
   (b) 거짓. 위 연습문제 1(c)를 보라. $\int_{-2}^1 x^3 dx < 0$ 이지만 (아래쪽 넓이가 윗쪽 넓이보다 큼) 구간 $[-2, 1]$ 전체에서 x^3 이 < 0은 아니다.
   (c) 참. f 의 그래프가 g 의 그래프의 아래쪽에 있다면 "f 의 넓이"는 "g 의 넓이"보다 작거나 같다. 다르게 말하자면 $f(x) \geq g(x)$ 이면 $\sum f(x)dx \leq \sum g(x)dx$ 이다.

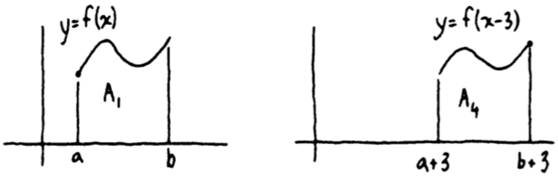
6. (a) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $\cos^2 x$ 아래의 넓이는 $\sin^2 x$ 아래의 면적과 같다. 따라서 적분값은 동일하다 (아래 그림 참조)



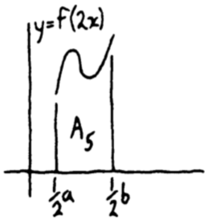
(b) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 x) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx - \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ 이다. 그런데 $\int_0^{2\pi} dx =$ (밑변이 2π 이고 높이가 1 인) 직사각형의 면적 $= 2\pi$ 이고 (a) 의 결과에 의해 $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$ 이다. 따라서 $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$ 이고, $2 \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = 2\pi$, 즉 $\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi$ 이다.

7. $A_1 = x = a$ 와 $x = b$ 사이의 f 의 그래프의 아래 넓이

(a) (아래 그림 참조) f 의 그래프와 구간 $[a, b]$ 가 모두 같이 이동한다면 동일한 넓이일 것이다. A_2 은 구간은 오른쪽으로 3 만큼 이동하지만 그래프는 이동하지 않는 경우이고 A_3 은 구간은 오른쪽으로 3 만큼 이동하고 그래프는 왼쪽으로 3 만큼 이동한 경우이다. A_4 가 그래프와 구간 모두 오른쪽으로 3 만큼 이동한 경우이다. 따라서 $A_1 = A_4$ 이다.



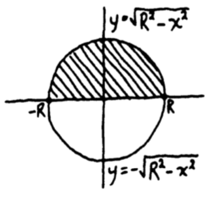
(b) (아래 그림 참조) A_5 에서는 그래프와 구간이 모두 수평방향으로 1/2씩 줄어들었다. 이렇게 만들어진 새로운 넓이는 예전 넓이의 반이므로 $A_5 = \frac{1}{2} A_1$ 이다.



8. (a) 10 (임시 변수를 바꾸어도 적분값은 달라지지 않는다)

(b) $\int_a^b 4x^3 dx = 10$ 그러므로 $4 \int_a^b x^3 dx = 10$ 이고 $\int_a^b x^3 dx = 10/4$.

9. 원 $x^2 + y^2 = R^2$ 을 생각하자 (아래 그림 참조). 위쪽 반원의 넓이는 $x = -R$ 과 $x = R$ 사이에에서 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ 그래프의 아래에 해당한다. 반원의 넓이 $= \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$ 이고 원의 넓이는 $2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$ 이다.



5.3 미분적분학의 기본정리

1. $(2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x)\Big|_{-1}^{2} = 14 - (-\frac{11}{2}) = \frac{39}{2}$

2. $(3t - \frac{1}{2}t^2)\Big|_{1}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$

3. $(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2 = \frac{80}{3} - 0 = \frac{80}{3}$

4. $-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

5. $\tan^{-1} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

6. $-(1/\pi)\cos \pi x\Big|_0^{1/2} = 0 - (-1/\pi) = 1/\pi$

7. $\ln x\Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$

8. $-1/12x^2\Big|_2^3 = -\frac{1}{108} - (-\frac{1}{48}) = \frac{5}{432}$

9. $2x^{3/2}\Big|_1^5 = 2\sqrt{5^3} - 2 = 10\sqrt{5} - 2$

10. $-\frac{2}{3}(10-x)^{3/2}\Big|_1^9 = -\frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}\sqrt{9^3}) = -\frac{2}{3} + \frac{54}{3} = \frac{52}{3}$

11. $\frac{1}{2}\ln(2x+1)\Big|_3^4 = \frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 7$

12. $4(5-(-2)) = 28$

13. $\tan x\Big|_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$

14. $\int_2^5 1dx = 1(5-2) = 3$

15. $\int_{-1}^2 (x^6 + 4x^3 + 4)dx = (\frac{1}{7}x^7 + x^4 + 4x)\Big|_{-1}^2 = \frac{296}{7} - (-\frac{22}{7}) = \frac{318}{7}$

16. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(\frac{1}{2}x + 7)^4 \cdot 2\Big|_2^4 = \frac{1}{8}(9^4 - 8^4) = \frac{2465}{8}$

17. $\frac{1}{8}\left(\frac{x+3}{5}\right)^8 \cdot 5\Big|_{-1}^1 = \frac{5}{8}\left[(\frac{4}{5})^8 - (\frac{2}{5})^8\right]$

18. $\frac{1}{3}\ln|x|\Big|_{-5}^{-4} = \frac{1}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\ln 5$

19. $(10/\pi)\sin\frac{1}{2}\pi x\Big|_{-3}^0 = 0 - 10/\pi = -10/\pi$

20. $-1/4(2x-9)^2\Big|_2^3 = -\frac{1}{4}(\frac{1}{9} - \frac{1}{25}) = -\frac{4}{225}$

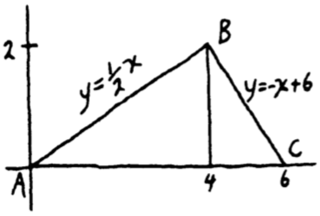
21. $\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}$

22. 아래 그림 참조

(a) 밑변 $\overline{AC} = 6$, 높이 $= 2$, 면적 $= \frac{1}{2}bh = 6$

(b) 직선 AB의 방정식은 $y = \frac{1}{2}x$, 직선 BC의 방정식은 $y = -x + 6$.

$$\begin{aligned}\text{넓이} &= \int_0^4 \frac{1}{2}x dx + \int_4^6 (-x+6)dx \\ &= \frac{1}{4}x^2\Big|_0^4 + (-\frac{1}{2}x^2 + 6x)\Big|_4^6 = 4 + 2 = 6\end{aligned}$$



23. $\dfrac{\int_0^\pi \sin x dx}{\pi - 0} = \dfrac{-\cos x\big|_0^\pi}{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$

24. (a) $\frac{1}{4}x^4 + C$

(b) $\frac{1}{4}x^4\Big|_1^2 = \dfrac{15}{4}$

25. $\int_2^3 5dx + \int_3^4 0dx + \int_4^6 x^3 dx = 5(3-2) + 0 + \frac{1}{4}x^4\big|_4^6 = 5 + 260 = 265$

26. $4 - x$는 $x < 4$이면 양수이고 $x > 4$이면 음수다. 따라서 $|4 - x|$는 $x < 4$이면 $4 - x$이고 $x > 4$이면 $-(4 - x)$이다. 그러므로

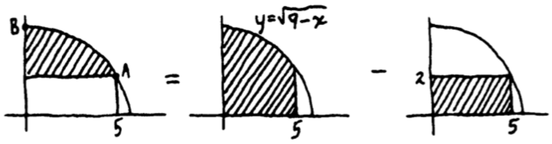
$$\begin{aligned}\int_3^1 0|4-x|dx &= \int_3^4 (4-x)dx + \int_4^{10} (x-4)dx \\ &= (4x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_3^4 + (\frac{1}{2}x^2 - 4x)\Big|_4^{10} = \frac{1}{2} + 18 = \frac{37}{2}\end{aligned}$$

27. (a) 그래프는 $x = 0, 2, 4$에서 x-축을 지난다.

$$\begin{aligned}\text{넓이} &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx \\ &= (\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2)\Big|_0^2 - (\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2)\Big|_2^4 \\ &= 4 - (-4) = 8\end{aligned}$$

(b) (아래 그림 참조) 방법 1: 주어진 넓이 $= \int_0^5 \sqrt{9-x}dx - 10 = -\frac{2}{3}(9-x)^{3/2}\big|_0^5 - 10 = \frac{38}{3} - 10 = \frac{8}{3}$

방법 2: 점 B의 좌표는 (0, 3)이다. 반시계방향으로 축을 회전시켜 x-축이 수직이고 y-축이 왼쪽으로 뉘어지도록 하면 주어진 영역은 $x = 9 - y^2$의 그래프 아래에 해당하고 넓이 $= \int_{y=2}^3 (9 - y^2)dy = (9y - \frac{1}{3}y^3)\big|_2^3 = 18 - \frac{46}{3} = \frac{8}{3}$.



5.4 수치적분

1. (a) $h = \frac{1}{4}$;

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0, & y_0 &= f(x_0) = 1; \\
x_1 &= \frac{1}{4}, & y_1 &= f(x_1) = 1.0019512; \\
x_2 &= \frac{1}{2}, & y_2 &= f(x_2) = 1.0307764; \\
x_3 &= \frac{3}{4}, & y_3 &= f(x_3) = 1.1473475; \\
x_4 &= 1, & y_4 &= f(x_4) = 1.4142136;
\end{aligned}$$

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = 1.0894134$$

(b) $h = \frac{1}{6}$;

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0, & y_0 &= f(x_0) = 1; \\
x_1 &= \frac{1}{6}, & y_1 &= f(x_1) = 0.027399; \\
x_2 &= \frac{1}{3}, & y_2 &= f(x_2) = 0.1053605; \\
x_3 &= \frac{1}{2}, & y_3 &= f(x_3) = 0.2231436; \\
x_4 &= \frac{2}{3}, & y_4 &= f(x_4) = 0.3677248; \\
x_5 &= \frac{5}{6}, & y_5 &= f(x_5) = 0.5273549; \\
x_6 &= 1, & y_6 &= f(x_6) = 0.6931472;
\end{aligned}$$

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) = 0.2639393$$

(c) $h = \frac{1}{8}$;

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1, & y_0 &= f(x_0) = 0.5; \\
x_1 &= \frac{9}{8}, & y_1 &= f(x_1) = 0.4125705; \\
x_2 &= \frac{5}{4}, & y_2 &= f(x_2) = 0.3386243; \\
x_3 &= \frac{11}{8}, & y_3 &= f(x_3) = 0.2778079; \\
x_4 &= \frac{3}{2}, & y_4 &= f(x_4) = 0.2285714; \\
x_5 &= \frac{13}{8}, & y_5 &= f(x_5) = 0.1889996; \\
x_6 &= \frac{7}{4}, & y_6 &= f(x_6) = 0.1572482; \\
x_7 &= \frac{15}{8}, & y_5 &= f(x_5) = 0.1317211; \\
x_8 &= 2, & y_8 &= f(x_8) = 0.1111111;
\end{aligned}$$

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8) = 0.2543498$$

(d) $h = \frac{1}{6}$;

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0, & y_0 &= f(x_0) = 1;\\
x_1 &= \frac{1}{6}, & y_1 &= f(x_1) = 0.9992287;\\
x_2 &= \frac{1}{3}, & y_2 &= f(x_2) = 0.9877302;\\
x_3 &= \frac{1}{2}, & y_3 &= f(x_3) = 0.9394131;\\
x_4 &= \frac{2}{3}, & y_4 &= f(x_4) = 0.8207548;\\
x_5 &= \frac{5}{6}, & y_5 &= f(x_5) = 0.6173908;\\
x_6 &= 1, & y_6 &= f(x_6) = 0.3678794;
\end{aligned}$$

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) = 0.8449433$$

2. $h = \frac{1}{4}$;

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1, & y_0 &= f(x_0) = 1;\\
x_1 &= \frac{5}{4}, & y_1 &= f(x_1) = 0.64;\\
x_2 &= \frac{3}{2}, & y_2 &= f(x_2) = \frac{4}{9};\\
x_3 &= \frac{7}{4}, & y_3 &= f(x_3) = 0.3265306;\\
x_4 &= 12 & y_4 &= f(x_4) = 0.25;
\end{aligned}$$

따라서

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = 0.5004176$$

정확한 값은 $(-1/x)\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = 0.5$

5.5 적분 불가능 함수

5.6 특이적분

1. $-1/4x^4\Big|_3^\infty = 0 + 1/4(81) = 1/324$

2. $\frac{5}{6}x^{6/5}\Big|_2^\infty = \infty - \frac{5}{6} \cdot 2\sqrt[5]{2} = \infty$

3. $-1/2x^2\Big|_{-\infty}^{-2} = -\frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{8}$

4. $-1/x\Big|_{-1}^{0-} = -(1/0-) - 1 = \infty$

5. $\ln x\Big|_{0+}^{2} = \ln 2 - (-\infty) = \infty$

6. 피적분함수가 $x = 0$에서 발산한다. $\int_{-2}^{0-} 1/x^3 dx + \int_{0+}^{3} 1/x^3 dx = -1/2x^2\Big|_{-2}^{0-} - 1/2x^2\Big|_{0+}^{3} = -(1/0+) + \frac{1}{8} - \frac{1}{18} + \frac{1}{0+} = -\infty + \infty$. 적분은 발산하고 따라서 "답 없음"

7. $\tan^{-1} x\Big|_{-\infty}^{0} = 0 - (-\pi/2) = \pi/2$

8. $\frac{1}{2}e^{4x}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

9. 피적분함수가 $x = 4$에서 발산한다. $\int_{2}^{4-} + \int_{4+}^{5} = -\frac{3}{2}(4-x)^{2/3}\Big|_{2}^{4-} - \frac{3}{2}(4-x)^{2/3}\Big|_{4+}^{5} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}$

10. $1/x^2$이 $x = 0$에서 발산한다. $\int_{-2}^{0-} + \int_{0+}^{3} = -1/x\Big|_{-2}^{0-} - 1/x\Big|_{0+}^{3} = \infty + \infty = \infty$

11. $1/x$가 $x = 0$에서 발산하고, 구간이 무한하므로 특이적분이다. $\ln x\Big|_{0+}^{\infty} = \infty - \infty$. 적분은 발산한다.

12. $-\cos x\Big|_{0}^{\infty} = -\cos\infty + 1$이지만, $\lim_{x\to\infty} \cos x$가 존재하지 않는다. ($\cos x$는 $x \to \infty$일 때 -1과 1 사이에서 진동) 따라서 적분은 발산한다.

13. $e^{-|x|}$는 $x \geq 0$이면 e^{-x}이고 $x < 0$이면 e^{x}이다. $\int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = e^x\Big|_{-\infty}^{0} + (-e^{-x})\Big|_{0}^{\infty} = 1 - 0 - 0 + 1 = 2$

14. $\tan x$가 $x = \pi/2$에서 발산하기 때문에 특이적분이다. $-\ln\cos x\Big|_{0}^{(\pi/2)-} = \ln(0+) + \ln 1 = \infty + 0 = \infty$

15. $\lim_{x\to\infty} x/(x^2+1) = \lim x/x^2$ (최고차수 법칙) $= \lim 1/x = 0$. $x \to -\infty$에 대해서도 유사하다. $\tan^{-1}\infty = \pi/2$, $\tan^{-1}(-\infty) = -\pi/2$. $F(\infty) - F(-\infty) = \frac{1}{2}[0 + \pi/2 - (0 - \pi/2)] = \pi/2$

16. $\ln x$가 $x = 0$에서 발산하므로 특이적분이다. $\lim_{x\to 0+} x\ln x$는 $0 \times \infty$이고 4.4절에서 본 것처럼 이 극한값은 0이다. 따라서 $(x\ln x - x)\Big|_{0+}^{1} = -1$.