4장 미분의 응용
연습문제 해답

4.1 극대와 극소

1. (a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$; $f'(x) = 3(x^2 - 2x - 8) = 0$ 으로부터 $x = 4$ 와 $x = -2$ 가 후보점이다.

    (i) f' 은 $(-\infty, -2)$ 에서 양수, $(-2, 4)$ 에서 음수, $(4, \infty)$ 에서 양수이므로 f 는 $x = -2$ 에서 극댓값을 $x = 4$ 에서 극솟값을 갖는다.

    (ii) $f''(x) = 6x - 6$ 이고 $f''(-2) = -18$ 로서 음수이므로 f 는 $x = -2$ 에서 극댓값을 갖는다. $f''(4) = 18$ 로서 양수이므로 f 는 $x = 4$ 에서 극솟값을 갖는다.

   (b) $f'(x) = 4x^3 - 2x$; $f'(x) = 2x(2x^2 - 1) = 0$ 으로부터 $x = 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ 이 후보점이다.

    (i) f' 는 $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ 에서 음수, $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$ 에서 양수 (예를 들어 $x = -0.01$ 을 테스트해본다), $(0, \sqrt{\frac{1}{2}})$ 에서 음수, $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty)$ 에서 양수이므로 f 는 $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ 에서 극솟값을, $x = 0$ 에서 극댓값을, $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 에서 극솟값을 갖는다.

    (ii) $f''(x) = 12x^2 - 2$ 이고 $f''(-\sqrt{\frac{1}{2}}) = 4$ 로서 양수이므로 $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ 에서 극솟값을 갖는다. $f''(0) = -2$ 로서 음수이므로 $x = 0$ 에서 극댓값을 갖는다. $f''(\sqrt{\frac{1}{2}}) = 4$ 로서 양수이므로 $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 에서 극솟값을 갖는다.

   (c) $f'(x) = 5x^4 + 1$ 이고 0이 될 수 없다. 따라서 후보점도 없고 극값도 없다 (f' 가 항상 양수이므로 f 는 극값이 없는 증가 함수다)

   (d) $f'(x) = (xe^x - e^x)/x^2$; $f'(x) = xe^x - e^x = 0$ 으로부터 $x = 1$ 이 후보점이다.

    (i) $x < 1$ 이면 f' 은 음수, $x > 1$ 이면 f' 은 양수이므로 f 는 $x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

    (ii) $f''(x) = (x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)/x^3$ 이고 $f''(1) = e$ 로서 양수이므로 f 는 $x = 1$ 에서극솟값을 갖는다.

   (e) $f'(x) = x \cdot (1/x) + \ln x = 1 + \ln x$; $f'(x) = 1 + \ln x = 0$ 으로부터 $x = e^{-1} = 1/e$ 가 후보점이다.

    (i) f 와 f' 은 모두 $x > 0$ 에서만 정의된다. 구간 $(0, 1/e)$ 을 생각해보면 이 구간 내의 점, 예를 들어 $x = 0.0001$ 을 테스트해본다. $f'(0.0001) = 1 + \ln 0.0001 = 1-($ 절댓값이 큰 음수$) = ($음수$)$ 다. 따라서 f' 은 이 구간에서 음수다. f' 은 $(1/e, \infty)$ 에서 양수이므로 f' 은 $x = 1/e$ 에서 극솟값을 갖는다.

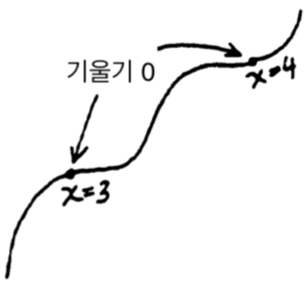
(ii) $f''(x) = 1/x$ 이고 $f''(1/e) = e$ 로서 양수이므로 $x = 1/e$ 에서 극솟값을 갖는다.

2. (a) 1계도함수 판정법에 의해 $x = 2$ 에서 극소
   (b) $x = 2$ 가 후보점이지만, 더 이상 어떤 결론도 내릴 수 없음
   (c) 어떤 결론도 내릴 수 없음
   (d) 기울기가 0이 아니므로 $x = 3$ 에서 극값 없음
   (e) 2계도함수 판정법에 의해 $x = 2$ 에서 극소
   (f) $x = 2$ 가 후보점이지만, 더 이상 어떤 결론도 내릴 수 없음
   (g) $x = 7$ 이 후보점이지만, 더 이상 어떤 결론도 내릴 수 없음

3. 반드시 그렇다고는 할 수 없다. 아래 그림에서 x_0 에서의 극솟값이 x_1 에서의 극댓값보다 더 크다.

4. 주어진 모든 함수에 대해 $x = 0$ 일 때 1계 미분은 0이고 2계 미분도 또한 0이다. 따라서 2계 도함수 판정법으로는 결론을 내릴 수 없다. 그래프를 살펴보면, x^3 은 $x = 0$ 에서 극값을 갖지않고, x^4 은 $x = 0$ 에서 극솟값을 갖으며 $-x^4$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값을 갖는다. 따라서 2계 도함수 판정법이 실패하는 상황에서는 세 가지 중 어느 것이든 될 수 있다.

5. 아래 그림 참조



4.2 최대와 최소

1. (a) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ 이므로 $(3x+5)(x-1) = 0$ 으로부터 $x = -\frac{3}{5}, 1$ 이면 $f'(x) = 0$ 이다.
   (i) 후보는 양끝값 $f(-\infty) = -\infty, f(\infty) = \infty$ 와 임겟값 $f(-\frac{3}{5}), f(1)$ 이다. 따라서 최댓값은 ∞ 이고 최솟값은 $-\infty$ 이다.
   (ii) 후보는 $f(0) = -5, f(1) = -8, f(2) = -3$ 이다. 따라서 최댓값은 -3, 최솟값은 -8 이다.
   (iii) 후보는 $f(-1) = 0, f(0) = -5$ 이다. 따라서 최댓값은 0이고 최솟값은 -5이다.
   (b) $f'(x) = (xe^x - e^x)/x^2$ 이므로 $xe^x - e^x = 0$, $e^x(x-1) = 0$ 로부터 $x = 1$ 이면 $f'(x) = 0$ 이다. f 는 $x = 0$ 에서 무한대 불연속이 존재한다는 점에 주의한다.

(i) 후보는 $f(0+) = \lim_{x\to 0+}(e^x/x) = 1/0+ = \infty$, $f(0-) = \lim_{x\to 0-}(e^x/x) = 1/0- = -\infty$ 와 양끝값 $f(-2), f(2)$ 그리고 임곗값 $f(1)$ 이다. 따라서 최댓값은 ∞ 이고 최솟값은 $-\infty$ 이다.

(ii) 후보는 $f(0+) = \infty, f(1) = e, f(2) = e^2/2$ 이다. 따라서 최댓값은 ∞ 이고 최솟값은 e 이다.

(iii) 후보는 $f(-\infty) = e^{-\infty}/-\infty = 0/-\infty = 0$, $f(0-) = -\infty$ 이다. 따라서 최솟값은 $-\infty$ 이고 최댓값은 0 이다.

(c) $f'(x) = (-x^2+4x-3)/(x^2-3)^2$ 이므로 $-x^2+4x-3 = 0$ 으로부터 $x = 3, 1$ 이면 $f'(x) = 0$ 이다. f 는 $x = \pm\sqrt{3}$ 에서 무한대 불연속이 존재한다는 점에 주의한다.

(i) 후보는 $x = 0, 5, 1, 3, \sqrt{3}$ 이다. $\lim_{x\to\sqrt{3}+} f(x) = (\sqrt{3}-2)/0+ = -\infty$, $\lim_{x\to\sqrt{3}-} f(x) = (\sqrt{3}-2)/0- = \infty$. 더 이상 다른 값들은 고려할 필요가 없다. 최대값은 $f(\sqrt{3}-) = \infty$ 이고 최솟값은 $(\sqrt{3}+) = -\infty$ 이다.

(ii) 후보는 $f(2) = 0, f(3) = \frac{1}{6}, f(5) = \frac{3}{22}$ 이다. 따라서 최댓값은 $\frac{1}{6}$, 최솟값은 0 이다.

(d) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$ 이므로 $x = \frac{1}{3}, -1$ 이면 $f'(x) = 0$ 이다. 후보는 $f(0) = 3, f(\frac{1}{3}) = \frac{76}{27}, f(4) = 79$ 이다. 최댓값은 79, 최솟값은 $\frac{76}{27}$ 이다.

2. f 는 감소하고 있고 그래프는 오른쪽 아래로 떨어진다. 따라서 최댓값은 $f(3)$ 이고 최솟값은 $f(4)$ 이다.

3. 함수의 형태로 보아, 최댓값은 $x = \pm\infty$ 일 때 ∞ 이고 최솟값은 $x = 0$ 일 때 $\sqrt{2}$ 이다.

4. $f(x)$ 를 x 명의 승객이 탑승할 때의 수익이라고 하자. 200 명이 넘는 승객의 수는 $x - 200$ 이므로 티켓 한 장의 가격은 30 만원에서 $(x-200)\times 1000$ 원이 줄어든 가격이다. 따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{(승객 수)} \times \text{(티켓 가격)} \\ &= x(300000 - (x-200)\cdot 1000) = 500000x - 1000x^2 \end{aligned}$$

여기서 $200 \le x \le 350$ 이다. $f'(x) = 500000 - 2000x$ 이고 $x = 250$ 일 때 $f'(x) = 0$ 이다. 후보는 $f(200) = 60,000,000, f(250) = 62,500,000, f(350) = 52,500,000$ 이다. 따라서 최대 수익은 승객이 250 명일 때이고 최소 수익은 350 명일 때다.

5. $\overline{CD} = x$ 라고 하자. 그러면 $\overline{AB} = 100+x$ 이고 변 $\overline{AE}$ 와 $\overline{BC}$ 에 쓸 수 있는 $200-(100+2x)$m의 철사가 남는다. 따라서 $\overline{BC} = \frac{1}{2}(200-(100+2x)) = 50-x$ 이고 넓이는 $A(x) = (100+x)(50-x) = 5000 - 50x - x^2$ 이다. 이때 $0 \le x \le 50$ 이다. $A'(x) = -50 - 2x$ 이고 $x = -25$ 일 때 $A'(x) = 0$ 이지만 $x = -25$ 는 구간 $[0, 50]$ 에 속하지 않기 때문에 무시한다. $A(50) = 0$ (마당의 형태는 150×0 이 된다), $A(0) = 5000$ 이다. 최대 넓이는 벽을 한 쪽 변으로 모두 사용하여 5000이 되고, 최소 넓이는 마당이 그냥 선분 모양이 되어 0이다.

6. 이것이 유일한 방법은 아니지만 $x = \overline{BC}$ 라고 하자. 그러면 $\overline{AB} = 150 - x$, $\dfrac{\overline{EB}}{150-x} = \dfrac{100}{150}$, $\overline{EB} = -\frac{2}{3}x + 100$, 넓이 $A(x) = \overline{BC} \times \overline{EB} = x\left(-\frac{2}{3}x + 100\right) = -\frac{2}{3}x^2 + 100$ 이다. 여기서 $0 \le x \le 150$. 그러면 $A'(x) = -\frac{4}{3}x + 10$ 이고, 임계점은 $x = 75$ 이다. 주어진 그림을 보면 x 의 끝점인 $x = 0, 150$ 에서는 집의 넓이가 0이 되므로 $\overline{BC} = 75 \times \overline{EB} = 50$ 인 형태일 때 최대 넓이가 된다.

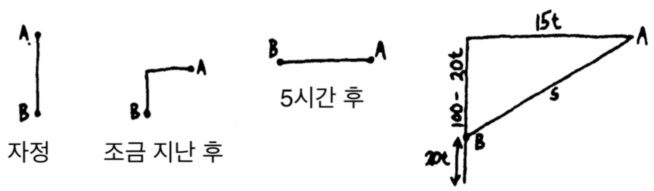
7. 지금보다 x 일을 더 살 찌워서 팔았을 때의 수익을 $p(x)$ 라고 하자. 그러면 $p(x) = (100 + 1.2x)(12000 - 30x) = -36x^2 + 11400x + 1200000$ 이고 여기서 $x \geq 0$ 이다. 또는 $0 \leq x \leq 400$ 이라고 둘 수 있는데 왜냐하면 400 일 후가 되면 12000 원이라는 수가 0 으로 내려가기 때문이다. 그러면 $p'(x) = -72x + 11400$ 이고 임계값이 되는 x 는 11400/72, 약 158.3 이다. $p(158.3) = 2,102,499.96$, $p(0) = 1,200,000$, $p(400) = 0$ 이므로 158 일 후에 파는 것이 가장 이익이 최대가 된다.

8. 기울기 $s(x) = -3x^2 - 10x - 13$ 이다. (f 가 아니고) s 의 최댓값과 최솟값을 찾는 문제이다. 그러면 $s'(x) = f''(x) = -6x - 10$ 이고 임계점에 해당하는 $x = -\frac{5}{3}$ 이지만 구간 바깥의 값이다. 따라서 후보는 $s(0) = -13$ 과 $s(1) = -26$ 이고 구간 $[0, 1]$ 에서 그래프 f 의 최대 기울기는 -13 이고 최소 기울기는 -26 이다.

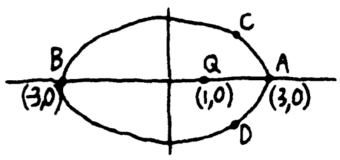
9. (아래 그림 참조) 오전 5시에 차량 B가 차량 A가 있던 도로에 도착하고 이때 두 차량은 75km 떨어져 있다. 이 때부터, 두 차량 사이의 거리는 계속 증가하므로 최솟값은 자정부터 오전 5시 사이에서 발생해야 한다. 자ㅇ정 이후 h 시간이 흐른 뒤, 차량 B는 $20t$km 만큼 이동했고, 차량 A는 $15t$ 만큼 이동했으므로 두 차량 사이의 거리는

$$s(t) = \sqrt{(100 - 20t)^2 + 225t^2}, \quad 0 \leq t \leq 5$$

이다. 계산 편의상, $s(t)$ 대신 $R(t) = (100 - 20t)^2 + 225t^2$ 을 가지고 생각할 수 있다. 그러면 $R'(t) = -40(100 - 20t) + 450t$ 이고 $t = \frac{16}{5}$ 일 때 $R'(t) = 0$ 이다. 따라서 후보는 $s(\frac{16}{5}) = 60$, $s(0) = 100$, $s(5) = 75$ 이다. 두 차량은 $t = 3.2$, 즉 오전 3시 12분에 가장 가까워진다.



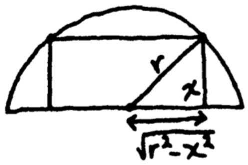
10. (아래 그림 참조) (x, y) 를 타원 위의 점이라고 하자. $(1, 0)$ 부터 이 점까지의 거리 s 는 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{1}{9}(36 - 4x^2)}$ 이다. 여기서 $-3 \leq x \leq 3$ 이다. 계산 편의상 s 대신 $R(x) = (x-1)^2 + \frac{1}{9}(36 - 4x^2)$ 을 가지고 생각할 수 있다. 그러면 $R'(x) = 2(x-1) - \frac{8}{9}x$ 이고 $x = \frac{9}{5}$ 일 때 $R'(x) = 0$ 이다. 후보는 $x = \frac{9}{5}$ 와 양 끝점 $x = \pm 3$ 이므로 후보점은 $A = (3, 0)$, $B = (-3, 0)$, $C = (\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$, $D = (\frac{9}{5}, -\frac{8}{5})$ 이다. $\overline{AQ} = 2$, $\overline{BQ} = 4$, $\overline{CQ} = \frac{1}{5}\sqrt{80}$, $\overline{DQ} = \frac{1}{5}\sqrt{80}$ 이다. 점 C와 점 D가 가장 가깝고, 점 B가 가장 멀다.



11. (아래 그림 참조) r 를 고정된 반지름이라고 하고 x 를 내접한 직사각형의 높이라고 하자. 넓이 $A(x) =$ 밑변 $\times$ 높이 $= 2x\sqrt{r^2 - x^2}$ 이고 여기서 $0 \leq x \leq r$ 이다. 그러면

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2x\frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) + 2\sqrt{r^2 - x^2} \\ &= 2\sqrt{r^2 - x^2} - 2x^2/\sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

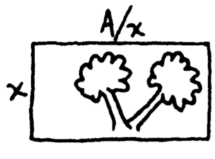
이고 $2(r^2-x^2)-2x^2=0$, 즉 $x=\pm r/\sqrt{2}$ 일 때 $A'(x)=0$ 이다. 음수인 x는 무시한다. 후보는 끝점인 $x=r/\sqrt{2}$ 와 $x=0, r$ 인데 이 값에서는 사각형이 하나의 선분이 되고 넓이가 0이 된다. 따라서 최소 면적을 가진 직사각형은 이렇게 선분이 되는 경우이고, 최대 면적을 가진 직사각형은 $r/\sqrt{2}\times 2r/\sqrt{2}$ 크기의 사각형이다.



12. 트럭의 속도를 s 라고 하자. 그러면 운송 시간은 $600/s$ 이고 총 비용 C = 기름값 + 운전사 수당 $=600\times(50+s)+\frac{600}{s}\times 3600$ 이 되고 $30\le s\le 80$ 이다. 그러면 $C'(s)=600+3600\cdot(-600/s^2)$ 이고 $s=\pm 60$ 일 때 $C'(s)=0$ 이 된다. 그러면 후보는 $s=30,60,80$ 이다. 각각의 비용은 120,000원, 102,000원, 105,000원이다. 따라서 가장 경제적인 속도는 60km/h이고 가장 경제적이지 않은 속도는 30km/h이다.

13. 정사각형을 만드는 데 x 만큼 사용하였다고 하면 $16-x$ 만큼으로 원을 만든다. 정사각형의 한 변의 길이는 $x/4$ 이고 넓이는 $x^2/16$ 이다. 원의 반지름은 $(16-x)/2\pi$ 이고 면적은 $\pi(16-x)^2/4\pi^2=(16-x)^2/4\pi$ 이다. 총 넓이 $A(x)=x^2/16+(16-x)^2/4\pi$ 이고 $0\le x\le 16$ 이다. 그러면 $A'(x)=\frac{x}{8}+\frac{1}{4\pi}\cdot 2(16-x)\cdot(-1)=\frac{x}{8}-\frac{16-x}{2\pi}$ 이고, $x=64/(\pi+4)$ 일 때 $A'(x)=0$ 이다. 따라서 후보는 $A(64/(\pi+4))=64/(\pi+4)$, $A(0)=64/\pi$, $A(16)=16$ 이고, 최댓값은 $A(0)$ 이다. 즉, 원을 만드는 데 모든 철사를 다 쓸 때 총넓이가 최대가 된다.

14. (아래 그림 참조) 정원의 한 변의 길이를 x 라고 하자. 면적이 A 로 일정해야 하므로 다른 한 변의 길이는 A/x 이다. 둘레의 길이 p 는 $2A/x+2x$, $x\ge 0$ 이다. $x=0$ 이면 옆으로 매우 길고 얇은 형태의 정원이 되고 둘레 길이는 매우 커지게 된다. $x=\infty$ 이면, 위로 매우 길고 기다란 형태의 정원이 되고 역시 둘레 길이는 매우 커지게 된다. 따라서 양 끝점에서는 둘레 길이가 최대가 되고 임계점에서 최소의 둘레 길이가 될 것임을 기대할 수 있다. $p'(x)=-2A/x^2+2$ 이고 $x=\sqrt{A}$ 일 때 $p'(x)=0$ 이 된다. 즉, 가장 최적의 정원 형태는 정사각형이고 둘레 길이(펜스 길이)는 $p(\sqrt{A})=4\sqrt{A}$ 이다.



15. x 를 숙박비라고 하자. 그러면 비는 방의 수는 $\frac{1}{2000}(x-50000)$ 이고 빌려주는 방의 수는 $100-\frac{1}{2000}(x-50000)=-\frac{1}{2000}x+125$ 이다. 수입 $I(x)=x\times$ 빌려주는 방의 수 $=x(-\frac{1}{2000}x+125)=125x-\frac{1}{2000}x^2$ 이고 여기서 $50000\le x\le 250000$ 이다. (가격을 250000원까지 올리면 모든 방이 비게 된다) 그러면 $I'(x)=125-\frac{1}{1000}x$ 이고 임계점은 $x=125000$ 이다. 따라서 후보는 $x=50000,125000,250000$ 이고 각각의 수입은 $5,000,000$원, $7,812,500$원, 0원이다. 그러므로 숙박비를 $125,000$원으로 할 때 수입이 최대가 된다.

4.3 로피탈 법칙과 증가 차수

1. (a) $0/0 = \lim_{x\to 1}(3x^2-5)/(2x-3)$ (로피탈 법칙) $= -2/-1 = 2$

   (b) $\frac{4}{2} = 2$

   (c) $\lim_{x\to\infty}(x^3/x^2)$ (최고 차수 법칙) $= \lim_{x\to\infty} x = \infty$

2. (a) x^2 이 더 높은 증가 차수를 가지므로 ∞

   (b) $0/0 = \lim x \to 2\dfrac{1/(x-1)}{1}$ (로피탈 법칙) $= 1$

   (c) $-\infty/0+ = -\infty$ (부정형 아님)

   (d) e^x 가 더 높은 증가 차수를 가지므로 0

   (e) $0/0 = \lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{\sin x} = 0/0 = \lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \dfrac{0}{-1} = 0$

   (f) $0/(1+0) = 0$

   (g) $\dfrac{-\infty}{e^\infty} = \dfrac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0+}\dfrac{1/x}{e^{1/x}\cdot(-1/x^2)}$ (로피탈 법칙) $= \lim_{x\to 0+}\dfrac{-x}{e^{1/x}} = \dfrac{0}{\infty} = 0$

   (h) $-\infty/0+ = -\infty$

   (i) $3x$ 가 더 높은 증가 차수를 가지므로 0

3. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)^{27}}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\dfrac{27(\ln x)^{26}\cdot(1/x)}{1}$ (로피탈 법칙) $= 27\lim\dfrac{(\ln)^{26}}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = 27\lim\dfrac{26(\ln x)^{25}\cdot(1/x)}{1}$ (로피탈 법칙) $= 27\cdot 26\lim\dfrac{(\ln x)^{25}}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$. 로피탈 법칙을 계속하여 사용하면 궁극적으로 $27!\lim\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = 27!\lim 1/x1 = 0$. 따라서 x 가 $(\ln)^{27}$ 보다 증가 차수가 더 높다.

4. (a) (i) 방법 1: (로피탈 정리 이용)

   $$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2} = \frac{3}{2}$$

   (ii) 방법 2: $u = 3x$ 라고 하자. $x \to 0$ 이면 $u \to 0$ 이고

   $$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{\frac{2}{3}u} = \frac{3}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = \frac{3}{2}\times 1 = \frac{3}{2}$$

   (b) (i) 방법 1: (로피탈 정리 이용)

   $$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1} = 0$$

   (ii) 방법 2:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x = 1\times 0 = 0$$

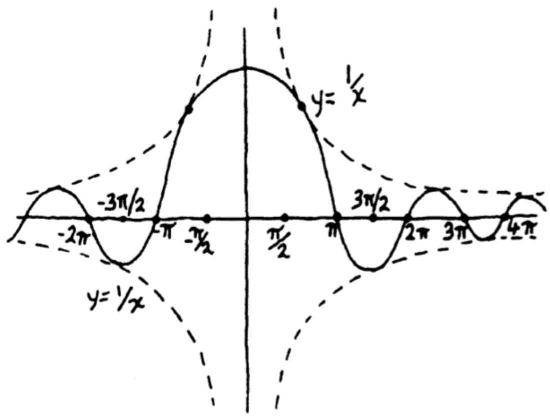
5. 첫번째 등식은 문제가 없다. 왜냐하면 처음 주어진 문제가 0/0 형태이기 때문이다. 그러나 $\lim_{x\to 1}\dfrac{8x-2}{6x-4} = \dfrac{6}{2}$ 이다. 이것은 부정형 형태의 분수식이 아니므로 로피탈 정리를 쓸 수 없다. 특별한 법칙을 쓸 필요가 전혀 없이 답은 $\frac{6}{2} = 3$ 이다.

6. (a) 증가 차수가 같다. (서로 상수배)

   (b) $\lim_{x\to\infty} e^{5x}/e^{3x} = \infty/\infty = \lim 5e^{5x}/3e^{3x} = \infty/\infty$, 결과가 없다. 대신 식을 정리하면 $\lim_{x\to\infty} e^{5x}/e^{3x} = \lim e^{2x} = \infty$. 따라서 e^{5x} 이 더 높은 증가 차수를 갖는다.

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln 3x}{\ln 4x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim \dfrac{1/3x \cdot 3}{1/4x \cdot 4}$ (로피탈 정리) $= \lim 1 = 1$. 따라서 증가 차수가 같다. 다른 방법으로는 $\ln 3x = \ln 3 + \ln x$ 이고 $\ln 4x = \ln 4 + \ln x$ 이므로 두 식 모두 $\ln x$ 와 동일한 증가 차수를 갖는다.

7. 우리는 이미 $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$ 임을 알고 있다. 쌍곡선 $y = 1/x$ 의 그래프와 이것을 x-축으로 대칭시킨 그래프를 그리면 이것이 포락선 역할을 한다. (아래 그림 참조)



4.4 곱, 차 및 지수 형태의 부정형

1. (a) $\infty \times e^{-\infty} = \infty \times 0$ 형태의 부정형이다. 그런데 $\lim_{x\to\infty} x/e^x = 0$. 왜냐하면 e^x 가 더 증가 차수가 높기 때문이다.

   (b) $0 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$

   (c) $(-\infty)e^{\infty} = -\infty \times \infty = -\infty$

2. (a) $1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

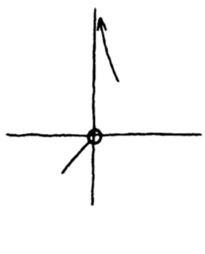
   (b) $0 - (-\infty) = \infty$

   (c) $\infty - \infty$. x^2 이 더 높은 증가 차수를 갖기 때문에 답은 ∞

3. (a) e^x 가 더 높은 증가 차수를 가지기 때문에 $-\infty$

   (b) $-\infty - 0 = -\infty$

4. $\lim_{x\to 0+} xe^{1/x} = 0 \times e^{\infty} = 0 \times \infty$. $u = 1/x$ 라고 하면, $u \to \infty$ 이고 문제는 $\lim_{u\to\infty} e^u/u = \infty$ 가 된다. 왜냐하면 e^u 이 더 높은 증가 차수를 가지기 때문이다. 또한 $\lim_{x\to 0-} xe^{1/x} = 0 \times e^{-\infty} = 0 \times 0 = 0$. 그래프를 그릴 목적으로 좀 더 정확하게 하면 $0 - \times 0+ = 0-$. (아래 그림 참조)



5. (a) $0 \times -\infty$; $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\cot x} = \dfrac{-\infty}{\infty} = \lim \dfrac{1/x}{-\csc^2} = \lim \dfrac{-\sin^2 x}{x} = 0/0 = \ldots = 0$. (마지막 부분은 4.3절의 연습문제 4(b) 참고)

(b) $1 \times -\infty = -\infty$

(c) $\infty \times \sin 0 = \infty \times 0$. $u = 1/x$ 라고 하면 $\lim_{u\to 0+}(\sin u)/u^2 = 0/0 = \lim(\cos u)/2u$ (로피탈 정리) $= 1/0+ = \infty$

(d) ∞^0 (부정형). $y = x^{1/x}$ 라고 하면 $\ln y = (1/x)\ln x$ 이고 $\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty}(\ln x)/x = 0$ ($\ln x$ 가 더 낮은 증가 차수를 갖음). 따라서 답은 $e^0 = 1$.

(e) $(0+)^\infty = 0$ (부정형 아님). 만일 바로 0이라는 답이 보이지 않는다면, $y = x^{1/x}$ 라고 놓으면 $\ln y = (1/x)\ln x$ 이고 $\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+}(\ln x)/x = -\infty/0+ = -\infty$. 답은 앞과 같이 $e^{-\infty} = 0$

(f) 1^∞ (부정형). $y = (1+x)^{1/x}$ 라고 하면 $\ln y = (1/x)\ln(1+x)$, $\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim \dfrac{1/(1+x)}{1}$ (로피탈 정리) $= 1$. 따라서 답은 $e^1 = e$.

(g) $\infty^\infty = \infty$

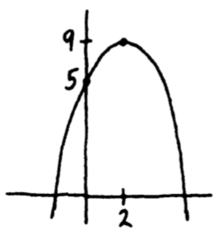
(h) $\infty \times (e^0 - 1) = \infty \times 0$. $u = 1/x$ 라고 하면 $u \to 0+$ 이고 $\lim_{u\to 0+}(e^u - 1)/u = \frac{0}{0} = \lim_{u\to 0+} e^u/1$ (로피탈 정리) $= 1$.

(i) $(0+)^2 = 0$

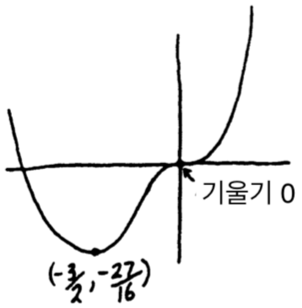
(j) 1^∞ (부정형). $y = (e^x + 4x)^{2/x}$ 라고 하면, $\ln y = (2/x)\ln(e^x + 4x)$ 이고 $\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} \dfrac{2\ln(e^x + 4x)}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim \dfrac{2/(e^x + 4x)\cdot(e^x + 4)}{1}$ (로피탈 정리) $= \lim_{x\to 0+} \dfrac{2(e^x + 4)}{e^x + 4x} = 10$. 따라서 답은 e^{10}.

4.5 함수의 그래프 그리는 방법

1. 위로 볼록인 포물선

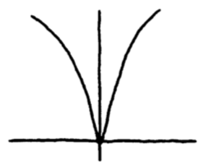


2. $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 0$ 으로 부터 $x = 0, -\frac{3}{2}$ 일 때 $f'(x) = 0$. $f''(x) = 12x^2 + 12x$ 이고 $f''(0) = 0$ (2계도함수 판정법으로는 어떠한 결론도 내릴 수 없음0, $f''(-\frac{3}{2}) = 9 > 0$ 이므로 극솟점. 구간 $(-\frac{3}{2}, 0)$ 에서 $f'(x)$ 는 양수이고 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x)$ 은 양수이므로 $x = 0$ 에서 극값이 없음. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 이고 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (x^4 항이 지배적임)

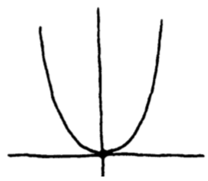


3. f는 $x \geq 0$에서만 정의된다. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$는 $x = 0$일 때만 0이고 다른 값에서는 양수이므로 f는 증가한다. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이고 $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}$는 모든 $x > 0$에 대해 양수이므로 아래로 볼록하다.

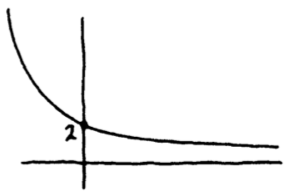
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. 식 모양을 살펴보면 f의 그래프는 $x = 0$일 때까지 떨어지다가 그 다음부터는 올라간다. 실제로 $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$은 $x < 0$이면 음수이고 $x = 0-$ 이면 $-\infty$, $x = 0+$ 이면 ∞, 그리고 $x > 0$이면 양수이다. 따라서 식 모양에서와 같이 f의 그래프는 떨어지다가 올라간다. 원점에서는 왼쪽 기울기는 $-\infty$이고 오른쪽 기울기는 ∞이다. 또한 $f(\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$이다.



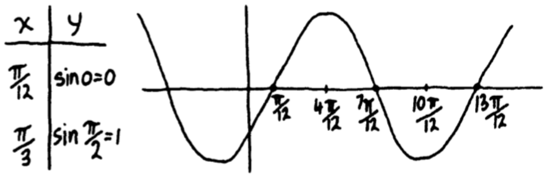
5. $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 10x = x(4x^2 + 3x + 10) = 0$에서 $4x^2 + 3x + 10 = 0$은 실근이 없으므로 유일한 해는 $x = 0$이다. f'는 $(-\infty, 0)$에서 음수이고 $(0, \infty)$에서 양수이므로 $x = 0$에서 극소다. $f(\infty) = \infty$, $f(-\infty) = \infty$ (x^4이 지배항이다)



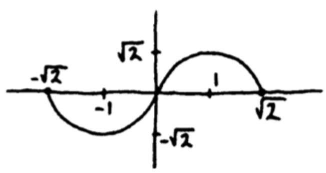
6. 지수 곡선이다. $f(\infty) = 2e^{-\infty} = 0$, $f(-\infty) = 2e^{\infty} = \infty$, $f(0) = 2$.



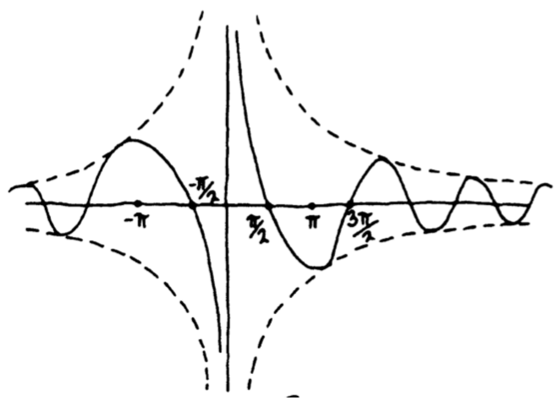
7. 주기가 π 인 사인 곡선이다. 위치를 잡기 위해 몇 개의 점을 찍어본다.



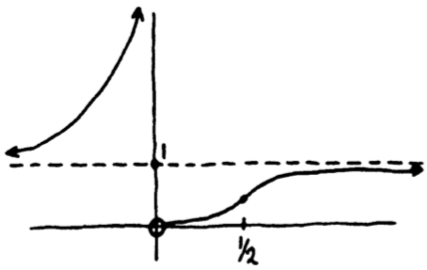
8. f 는 $-\sqrt{2} \le x\sqrt{2}$ 에서 정의된다. $f(-\sqrt{2}) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 0$ 이다. 곱 법칙을 이용하여 미분하고 정리하면 $f'(x) = (2-2x^2)/\sqrt{2-x^2}$ 이고 $x = \pi 1$ 일 때 $f'(x) = 0$ 이다. f' 은 $(-\sqrt{2}, -1)$ 에서 음수, $(-1, 1)$ 에서 양수, $(1, \sqrt{2})$ 에서 음수이므로 그래프는 내려가다 올라가고 다시 내려온다.



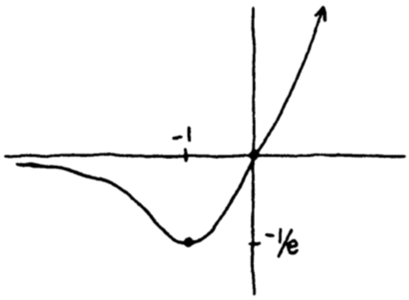
9. $\lim_{x\to 0+} \cos x/x = 1/0+ = \infty$, $\lim_{x\to 0-} = 1/0- = -\infty$. 다른 점들에서는 코사인 곡선을 포락선인 $y = \pm 1/x$ 에 꼭 껴맞추고 $1/x$ 가 음수인 구간, 즉 $x < 0$ 인 구간에서는 코사인 그래프를 대칭시킨다.



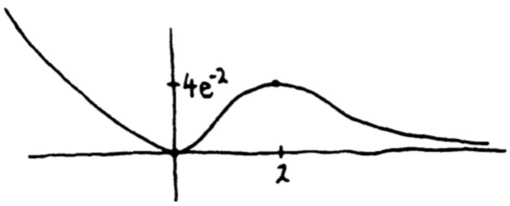
10. $f'(x) = e^{-1/x} \cdot 1/x^2$, $f''(x) = e^{-1/x} \cdot \dfrac{-2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} \cdot e^{-1/x} \cdot \dfrac{1}{x^2} = e^{-1/x}\left(\dfrac{-2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)$. $x \neq 0$ 에 대해 $f'(x) > 0$ 이고 f 의 그래프는 $(-\infty, 0)$ 과 $(0, \infty)$ 에서 올라간다. $f(0-) = e^{\infty} = \infty$, $f(0+) = e^{-\infty} = 0$, $f(\infty) = e^0 = 1$, $f(-\infty) = e^0 = 1$, 한편 $x = \frac{1}{2}$ 이면 $f''(x) = 0$ 이고 $(-\infty, 0)$ 에서 f'' 은 양수이므로 그래프는 아래로 볼록하고 $(0, \frac{1}{2})$ 에서 f'' 은 양수이므로 역시 그래프는 아래로 볼록하고, $(\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 f'' 는 음수이므로 그래프는 위로 볼록하다.



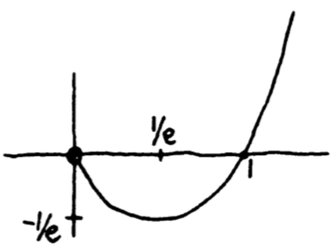
11. $f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$은 $x = -1$일 때 0. $f''(x) = e^x + e^x(x+1) = e^x(x+2)$이므로 $f''(-1)$은 양수이고 $x = -1$에서 극소. $f(\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty \times 0 = \lim_{x\to-\infty}(x/e^{-x}) = -\infty/\infty = \lim_{x\to-\infty}(1/-e^{-x})$ (로피탈 정리) $= \lim_{x\to-\infty}(-e^x) = 0-$.



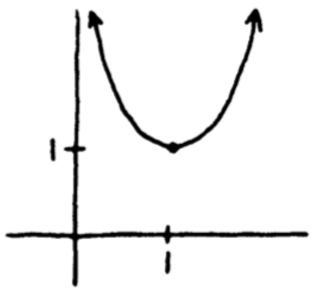
12. $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$은 $x = 0, 2$일 때 0이고, $(0, 2)$에서는 양수, $x > 2$ 또는 $x < 0$일 때는 음수이므로 $x = 2$에서 극대이다. $f(\infty) = \infty \times 0 = \lim(x^2/e^x) = 0$ (e^x이 증가 차수가 더높다). $f(-\infty) = \infty \times \infty = \infty$.



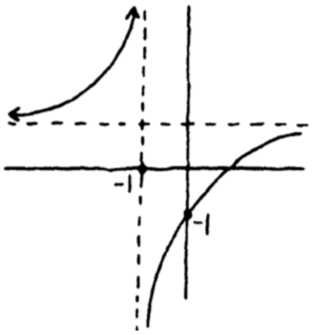
13. $f'(x) = 1 + \ln x$는 $x = 1/e$일 때 0. $f''(x) = 1/x$이고 $f''(1/e)$는 양수이므로 $x = 1/e$에서 극소. $f(\infty) = \infty$, $f(0+) = 0 \times -\infty = \lim_{x\to0+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \dfrac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to0+} \dfrac{1/x}{-1/x^2}$ (로피탈 정리) $= \lim_{(} -x) = 0$.



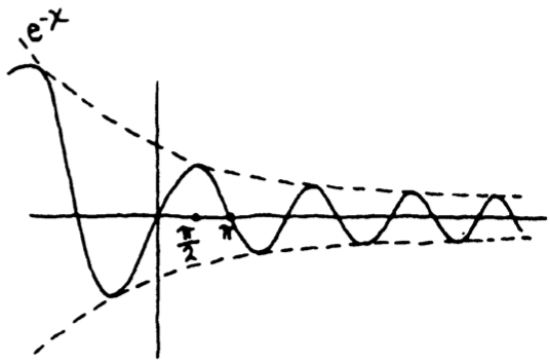
14. (방법 1) $y = x$와 $y = \ln x$를 그리고 높이를 서로 뺀다. (방법 2) $f'(x) = 1 - 1/x$는 $x = 1$일 때 0. $f''(x) = 1/x^2$이고 $f''(1)$은 양수이므로 이 점에서 극소. $f(\infty) = \infty$ (x항이 지배항). $f(0+) = 0 - (-\infty) = \infty$.



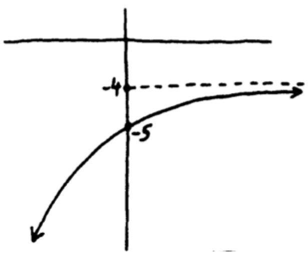
15. $f'(x) = 2/(x+1)^2$ 이므로 $x > -1$ 과 $x < -1$ 에서 양수이고 $(-\infty, -1)$ 과 $(-1, \infty)$ 에서 그래프가 올라간다. $f(\infty) = \lim(x/x) = 1$ (최고차수 법칙), $f(-\infty) = 1$, $\lim_{x\to(-1)+} f(x) = -2/0+ = -\infty$, $\lim_{x\to(-1)-} f(x) = -2/0- = \infty$.



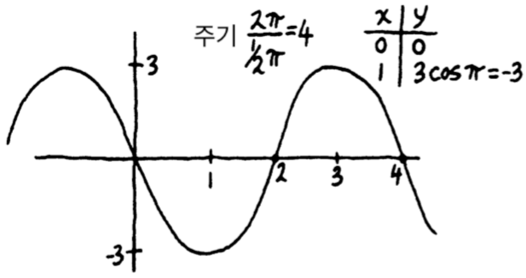
16. (아래 그림 참조)



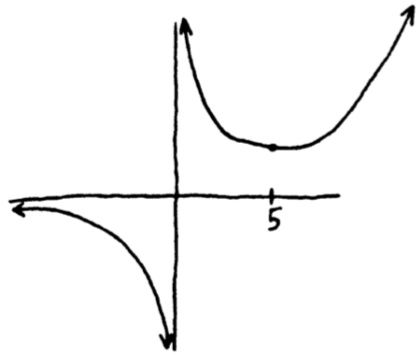
17. 지수 곡선이다. $f(\infty) = -4$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(0) = -5$



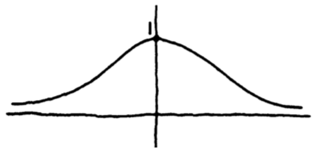
18. (아래 그림 참조)



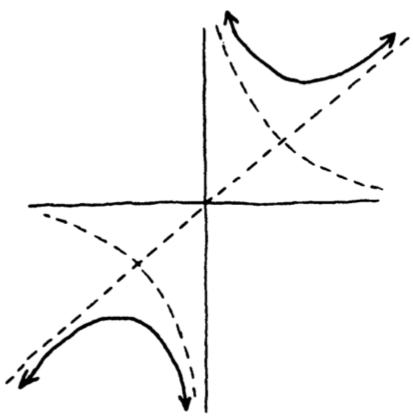
19. $f'(x) = e^x(x-5)/x^6$ 은 $x = 5$ 일 때 0 이다. $f'(x)$ 은 $(-\infty, 0)$ 에서 음수, $(0, 5)$ 에서 음수, $(5, \infty)$ 에서 양수이고 $x = 5$ 에서 극소다. e^x 가 더 높은 증가 차수를 가지므로 $f(\infty) = \infty$ 이다. $f(-\infty) = 0/-\infty = 0$, $f(0+) = 1/0+ = \infty$, $f(0-) = 1/0- = -\infty$.



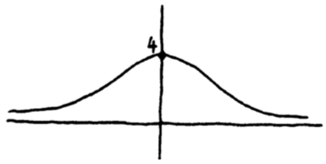
20. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ 은 $x = 0$ 일 때 0 이고, $x < 0$ 이면 양수, $x > 0$ 이면 음수, 따라서 $x = 0$ 에서 극대다. $f(\infty) = e^{-\infty} = 0$, $f(-\infty) = 0$.



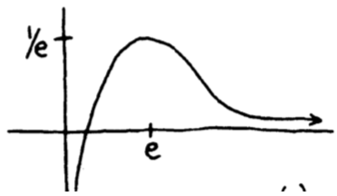
21. (방법 1) $y = x$ 와 쌍곡선 $y = 1/x$ 를 그리고 높이를 더한다. (방법 2) $f'(x) = 1 - 1/x^2$ 은 $x = \pm 1$ 이면 0. $f''(x) = 2/x^3$ 이므로 $f''(1)$ 은 양수, $f''(-1)$ 은 음수다. 따라서 극솟점은 $(1, 2)$, 극댓점은 $(-1, -2)$. $f(\infty) = \infty + 0 = \infty$, $f(-\infty) = -\infty + 0 = -\infty$, $f(0+) = 0 + \infty = \infty$, $f(0-) = 0 + (-\infty) = -\infty$ 이고 결과는 방법 1과 동일하다.



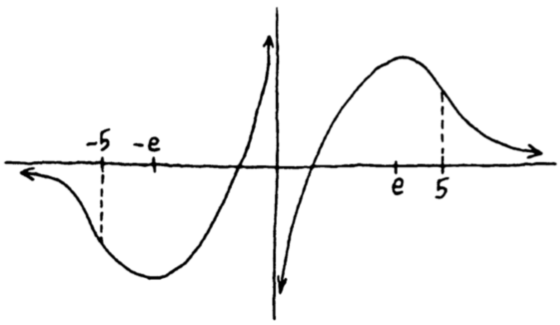
22. $f(\infty) = 0, f(-\infty) = 0$. 식을 살펴보면 f는 $x = 0$에서 최댓값 4를 갖는다.



23. (a) f는 $x > 0$에서 정의된다. $f(0+) = -\infty/0+ = -\infty$, $f(\infty) = 0$ (x가 $\ln x$보다 증가 차수가 더 높다). $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$은 $x = e$에서 0이고 $0 < x < e$에서는 양수, $x > e$에서는 음수이므로 $x = e$에서 극대다.



(b) $(\ln|x|)/x$의 그래프는 $x > 0$에서는 $(\ln x)/x$의 그래프와 일치한다. 즉 $(\ln|x|)/x$의 그래프의 오른쪽 반은 (a)와 동일하다. 그러나 왼쪽 반도 역시 존재한다. 예를 들어 $x = -5$를 생각해보자. 그러면 $(\ln|x|)/x = \ln 5/(-5) = -\ln 5/5$이고 이 값은 (a) 그래프에서의 $x = 5$에 높이와 부호가 정반대인 값이다. 그러므로 (b)에서의 그래프는 (a)에서의 그래프를 아래 그림과 같이 원점 대칭시켜 얻는다.



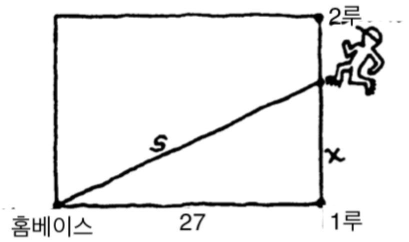
4.6 서로 관련된 비율

1. 관련된 함수는 부피 $V(t)$와 반지름 $r(t)$이고 두 함수는 $V(t) = \dfrac{4}{3}\pi[r(t)]^3$으로 관련되어 있다. 그러면 $V'(t) = 4\pi r^2 r'$이다. 문제에서 $V' = -10$ (녹고 있으므로 부피가 감소하고 있다)이다. $r = 2$일 때, $-10 = 4\pi \cdot 4 \cdot r'$, 그러므로 $r' = -\frac{5}{8\pi}$. 이 순간 반지름은 초당 $5/8\pi$cm씩 줄어들고 있다.

2. $A(t) = b(t)h(t)$이므로 $A'(t) = b(t)h'(t) + h(t)b'(t)$ (곱 법칙). 만일 $b = 6, h = 8, b' = 4, h' = -3$이면 $A' = 14$이다. 면적은 초당 14 cm^2 만큼씩 늘어나고 있다.

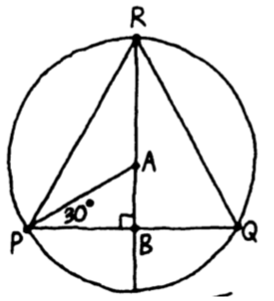
3. (아래 그림 참조) $s(t)$와 $x(t)$를 아래 그림에 나타낸 것과 같은 거리라고 하자. 그러면 $s^2 = 27^2 + x^2$이고 양변을 t에 대해 미분하면 $2ss' = 2xx'$, 즉 $s' = xx'/s$이다. 이제 주자가 9m 지점에서 달리고 있을 때의 특정한 값들을 대입한다. $x = 9, s = 9\sqrt{10}, x'(t) = 7.6$($x$ 값이

증가하는 중이므로 양수)를 대입하면 $s' = (9)(7.6)/9\sqrt{10} = 7.6/\sqrt{10}$. 주자는 홈베이스로부터 $7.6/\sqrt{10}$m/sec의 빠르기로 멀어지고 있다.

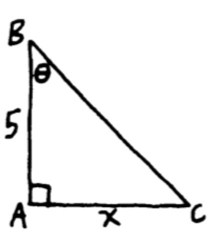


4. 시각 t일 때 수면이 높이를 $h(t)$라고 하고 이때의 물의 부피를 $V(t)$라고 하자. 그러면 $V(t) = \pi r^2 h(t) = 16\pi h(t)$이고 $V'(t) = 16\pi h'(t)$이다. 따라서 $h'(t) = V'(t)/16\pi = 8/16\pi$. 모든 순간 수면은 분당 $1/2\pi$의 빠르기로 상승하고 있다.

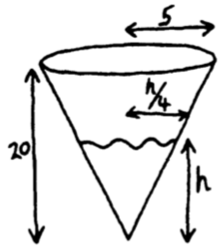
5. (아래 그림 참조) PQR이 정삼각이고 원의 중심이 A, 반지름이 r이면, $\overline{AP} = r$, PBA는 $30° - 60° - 90°$ 삼각형, $\overline{AB} = \frac{1}{2}r$, $\overline{PB} = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, 높이 $\overline{RB} = r + \frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$, 밑변 $\overline{PQ} = r\sqrt{3}$, 면적 $A(t) = \frac{1}{2}bh = \frac{3}{4}\sqrt{3}[r(t)]^2$이다. 그러면 $A'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{3}rr' = \frac{9}{2}\sqrt{3}r$이다 ($r' = 3$이므로). 만일 $r = 4$이면, $A' = 18\sqrt{3}$이다. 즉 삼각형의 넓이는 이 순간 $18\sqrt{3}cm^2/sec$의 빠르기로 늘어나고 있다.



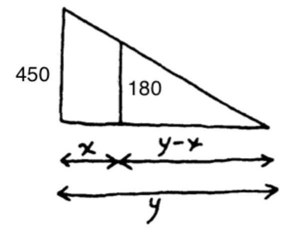
6. 아래 그림에서 $x(t) = 5\tan\theta(t)$이고 $x'(t) = 5\sec^2\theta(t) \cdot \theta'(t) = 10\pi\sec^2\theta$이다 (왜냐하면 $\theta'(t) = 2\pi$ rad/sec으로 주어져 있기 때문이다). 만일 $x = 2$이면 $\overline{BC} = 13$, $\sec\theta = \frac{13}{5}$, $x' = 338\pi/5$ km/min이고 이 값이 불빛이 움직이고 있는 빠르기다.



7. 아래 그림에서, 시각 t일 때 수면의 높이를 $h(t)$라고 한다면 비례에 의해 물이 차 있는 원뿔의 반지름은 $h/4$이고, 부피 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{48}{\pi}h^3$이다. 따라서 $V'(t) = \frac{1}{16}\pi h^2(t)h'(t)$이고 $V' = 3$으로 주어졌으므로 $h'(t) = 48/\pi h^2$이다. $h = 2$이면 $h' = 12/\pi$이므로 수면은 분당 $12/\pi$ 미터의 빠르기로 상승하고 있다.



8. 아래 그림에서, 닮은 삼각형에 의해 $\dfrac{y}{450} = \dfrac{y-x}{180}$ 으로부터 $6y = 15y - 15x$, 즉 $y = \frac{5}{3}x$ 이다. 그러면 문제에서 $x'(t) = 90$ 으로 주어졌으므로 $y'(t) = \dfrac{5}{3}x'(t) = 150$ 이다. y 값이 150cm/sec 빠르기로 증가하고 있으므로, 그림자의 머리 부분의 속도는 150cm/sec 이다.

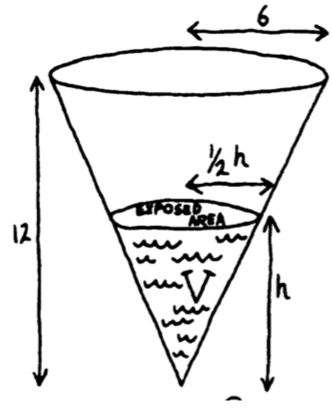


9. 아래 그림에서, 시각 t 일 때 수면의 높이를 $h(t)$ 라고 하자. 닮은 삼각형에 의해 물이 차 있는 원뿔의 반지름은 $\frac{1}{2}h$ 이다. 그러면 부피 $V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi[h(t)]^2$ 이고 $V'(t) = \frac{1}{4}\pi h^2 h'$ 이다.

   (a) 주어진 문제에서 $V' = -10$ 이다 (물이 새어 나가면 부피가 줄어들므로 음수다). $h = 3$ 이면 $h' = (4)(-10)/9\pi = -40/9\pi$ 이다. 즉 수면은 분당 $40/9\pi$ cm 씩 내려가고 있는 중이다.

   (b) $h = 2$ 이고 $h' = -2$ 이면 $V' = -18\pi$ 이다. 부피가 분당 $18\pi cm^3$ 씩 줄어들고 있고, 즉 분당 $18cm^3$ 씩 새어나가고 있다.

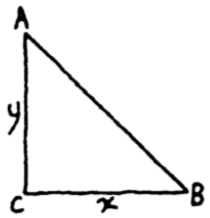
   (c) $h = 2$ 이면 $r = 1$ 이고 수면의 넓이는 $\pi r^2 = \pi$ 이다. $V' = -\sqrt{\pi}$ (물이 증발하면 부피가 줄어들기 때문에 음수다), $h' = 4V'/\pi h^2 = -1/\sqrt{\pi}$ 이다. 수면은 분당 $1/\sqrt{\pi}$ cm 씩 내려가고 있는 중이다.



10. 면적 $A(t) = \pi[r(t)]^2$ 이고 $r' = 2$ 이므로 $A'(t) = 2\pi r r' = 4\pi r$ 이다. $r = 5$ 이면 $A' = 20\pi$ 이므로 동심원의 넓이는 $20\pi m^2/sec$ 씩 증가하고 있다.

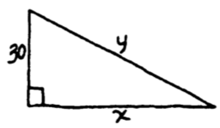
11. 안쪽 원의 반지름을 r, 바깥쪽 원의 반지름을 R이라고 하자. 그러면 $A(t) = \pi[R(t)]^2 - \pi[r(t)]^2$이고 $r' = 4, R' = 2$이므로 $A'(t) = 2\pi RR' - 2\pi rr' = 4\pi R - 8\pi r$이다. $r = 5, R = 9$이면 $A' = 36\pi - 40\pi = -4\pi$이다. 즉 이 순간 두 원 사이의 넓이는 $4\pi m^2/sec$의 빠르기로 줄어들고 있다.

12. 아래 그림에서, $A(t) = \frac{1}{2}x(t)y(t)$이고 $y' = 6$ (y값이 증가하고 있으므로 양수) 이고 $x' = -4$ (x값은 감소하고 있으므로 음수) 이므로 $A'(t) = \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}x'y$ (곱 법칙) $= 3x - 2y$이다. $y = 12, x = 10$이면 $A' = 30 - 24 = 6$이므로 넓이는 $6m^2/sec$의 빠르기로 커지고 있다.



13. $r(t)$를 구의 반지름이라고 하자. 그러면 부피 $V(t) = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3$이고 $V'(t) = 4\pi r^2 r'$이다. 겉넓이는 $4\pi r^2$이고 얼음의 녹는 속도는 겉넓이에 비례하므로 어떤 양수 k에 대해 $V' = -k(4\pi r^2)$이다 (얼음이 녹고 있기 때문에 V'의 부호는 음수다). 그러면 $r' = V'/4\pi r^2 = -k(4\pi r^2)/4\pi r^2 = -k$이다. 즉 반지름은 단위 시간당 k 단위 부피의 "일정한" 속도로 감소하고 있다. 그러므로 얼음의 두께는 "일정한" 속도로 줄어들고 있다.

14. 아래 그림에서, $x^2(t) = y^2(t) - 900$이고 양변을 t에 대하여 미분하면 $2xx' = 2yy'$이고 $x' = yy'/x = -2y/x$이다 (주어진 문제에서 $y' = -2$이기 때문). $y = 50$이면 $x = 40$이고 $x' = -\frac{5}{2}$이다 (물고기가 부두쪽으로 다가오고 있고 x가 감소하고 있으므로 음수인 것이 타당하다). 물고기가 움직이는 속도는 $\frac{5}{2}$ m/sec이다. $y = 31$이면 $x = \sqrt{61}$이고 $x' = -62/\sqrt{61}$이다. 이제 물고기가 움직이는 속도는 $62/\sqrt{61}$m/sec이다 (이전보다 더 빠르다).



15. 만일 y가 t의 함수라면, $1/y$를 t에 대해 미분하면 연쇄법칙에 의해 $(-1/y^2) \cdot y'$이다. 따라서 주어진 저항값 식을 t에 대해 미분하면 $-\dfrac{1}{R}R' = -\dfrac{1}{R_1^2}R_1' - \dfrac{1}{R_2^2}R_2'$이다. $R_1' = 2, R_2' = -3$이므로 $R' = R^2\left(\frac{2}{R_1^2} + \dfrac{-3}{R_2^2}\right)$이다. $R_1 = 10, R_2 = 20$이면 $1/R = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$이므로 $R = \frac{20}{3}$이고 $R' = \dfrac{400}{9}\left(\dfrac{2}{100} - \dfrac{3}{400}\right) = \dfrac{5}{9}$이다. 즉, R은 $\dfrac{5}{9}\Omega/min$의 빠르기로 이 순간 증가하고 있다.

4.7 뉴턴의 방법

1. $f(x) = x^2 - 39$라고 하자. 그러면 $f'(x) = 2x$이다. 그러면 식 (4.18)은 다음과 같다.

$$\text{새로운 } x = \text{마지막 } x - \frac{(\text{마지막})^2 - 39}{2 \times \text{ 마지막}}$$

마지막 $x = 6$ 이면 새로운 $x = 6 - \dfrac{36-9}{12} = 6.25$ 이다. 다시 마지막 $x = 6.25$ 이면 새로운 $x = 6.25 - \frac{(6.25)^2-39}{12.5} = 6.245$ 이다. 다시 마지막 $x = 6.245$ 이면 새로운 $x = 6.244998$ 이다. 마지막 두 어림값이 소수 두번째 자리까지 일치한다. 따라서 $\sqrt{39}$ 를 6.24로 추정한다. 실제로 $f(6.24) < 0$ 이고 $f(6.245) > 0$ 이므로 근은 6.24와 6.245 사이에 존재하고 소수 두번째 자리까지는 맞는 값임을 알 수 있다.

2. 방정식을 $x^3 = 173$ 을 풀면 된다. $f(x) = x^3 - 173$ 이라고 하자. 그러면 $f'(x) = 3x^2$ 이고 식 (4.18)은 다음과 같다.

$$\text{새로운 } x = \text{마지막 } x - \frac{(\text{마지막})^3 - 173}{3 \times (\text{마지막})^2}$$

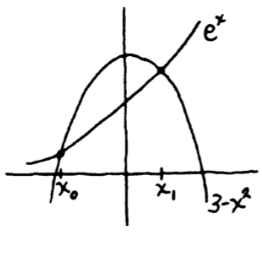
173은 5^3 과 6^3 사이에 있으므로 첫 추측값으로써 마지막 x 의 값을 5.5로 시작하자. 위 식에 이 값을 시작으로 새로운 x 의 값을 계속 업데이트해 나가면 5.5730028, 5.5720548, 5.5720547 이 됨을 알 수 있다. (계산기 사용 필요) 소수 여섯짜리 수까지 일치하므로 여기서 멈추고 5.572054를 어림값으로 한다. 실제로 $f(5.572054) < 0$ 이고 $f(5.5720548) > 0$ 이므로 5.572054와 5.5720548 사이에 근이 존재하고 소수 여섯짜리 수까지는 맞는 값임을 알 수 있다.

3. 아래 그림을 보면, $e^x = 3 - x^2$ 은 두 개의 근 x_0, x_1 이 있음을 알 수 있다. $f(x) = e^x + x^2 - 3$ 이라고 하면, $f'(x) = e^x + 2x$ 이고, 식 (4.18)은 다음과 같다.

$$\text{새로운 } x = \text{마지막 } x - \frac{e^{\text{마지막}} + (\text{마지막})^2 - 3}{e^{\text{마지막}} + 2(\text{마지막})}$$

첫 번째 추정값으로 $x = 1$ 로 시작하면 새로운 x 값은 연달아 0.8477662, 0.8345815, 0.8344869 로 업데이트 된다. 0.834를 어림값으로 한다. 실제로 $f(0.834) < 0$ 이고 $f(0.8345) > 0$ 이므로 0.834와 0.8345 사이에 근이 존재하고 소수 세번째 자리까지는 맞는 값임을 알 수 있다.

이번에는 첫 추정값으로 $x = -2$ 로 시작하면 새로운 x 값은 연달아 -1.7072267, -1.6775167, -1.672327로 업데이트 된다. -1.677을 어림값으로 한다. 실제로 $f(-1.677) < 0$ 이고 $f(-1.6773) > 0$ 이므로 -1.6773과 -1.677 사이에 근이 존재하고 소수 세번째 자리까지는 맞는 값임을 알 수 있다.

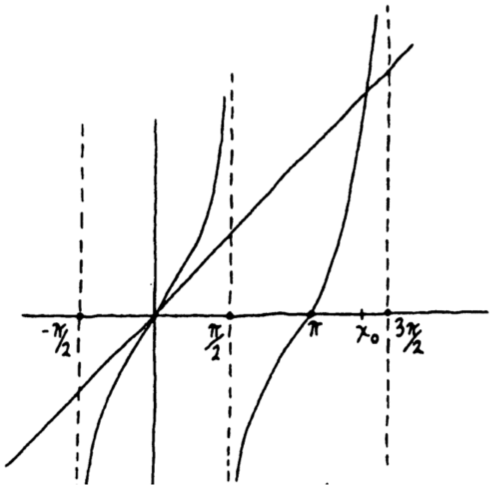


4. (a) (아래 그림 참조) $y = x$ 의 그래프와 $y = \tan x$ 의 그래프는 $(0, \pi/2)$ 구간에서는 서로 만나지 않기 때문에 해가 없다.

   (b) 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 에서 교차점이 존재하고 교차점의 x 좌표를 x_0 라 하자. x_0 를 구하기 위해 첫 추측값으로써 $3\pi/2$ 근방에서 값을 선택하여 마지막 $x = 4.5$ 로 두고 시작한다. $f(x) = x - \tan x$ 라고 하면 $f'(x) = 1 - \sec^2 x$ 이고 식 (4.18)은 다음과 같다.

$$\text{새로운 } x = \text{마지막 } x - \frac{\text{마지막} - \tan(\text{마지막})}{1 - \sec^2(\text{마지막})}$$

그러면 새로운 x 값은 연달아 4.4936139, 4.4934097이 되고 소수점 세째 자리까지 일치하므로 여기서 멈추고 4.493을 어림값으로 한다. 실제로 $f(4.493) > 0$이고 $f(4.4935) < 0$이므로 4.493과 4.4935 사이에 근이 존재하고 소수 세번째 자리까지는 맞는 값임을 확인할 수 있다.



4.8 미분소

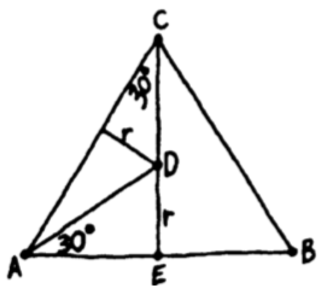
1. (a) $dx/2\sqrt{x}$
   (b) $-\sin x dx$
   (c) $x^5 d(\sin x) + \sin x(dx^5) = x^5 \cos x dx + 5x^4 \sin x dx$
   (d) $\dfrac{xd(\sin x) + \sin x d(x)}{x^2} = \dfrac{x \cos x dx - \sin x dx}{x^2}$
   (e) $\cos x^5 d(x^5) = 5x^4 \cos x^5 dx$
   (f) 0

2. $6x^2 dx$

3. $df = dx$

4. (a) $d(x^3 + x^2) = (3x^2 + 2x)dx$. $x = 3, dx = -0.0001$으로 두면 $d(x^3 + x^2) = -0.0033$
   (b) $d(x^{1/4}) = \frac{1}{4}x^{-3/4}dx$. $x = 16, dx = 0.1$로 두면 $d(x^{1/4}) = \frac{1}{4}(16)^{-3/4} \times 0.1 = (\frac{1}{4})(\frac{1}{8})(0.1) = 1/320$

5. (a) (아래 그림 참조) 삼각법에 따라, $\overline{AE} = r\sqrt{3}$, $\overline{CD} = \overline{AD} = 2r$, 밑변 $b = 2r\sqrt{3}$, 높이 $h = 3r$, 면적 $A = \frac{1}{2}bh = 3r^2\sqrt{3}$. r이 dr만큼 변하면 $dA = 6r\sqrt{3}dr$



(b) $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$. h는 고정되고 r이 dr만큼 변하면 $dV=\frac{2}{3}\pi rhdr$.

4.9 변수분리형 미분방정식

1. (a) $\cos ydy=-xdx$, $\sin y=-\frac{1}{2}x^2+C$ (음함수 형태의 해)

   (b) $ydy=-dx/x^3$, $\frac{1}{2}y^2=1/2x^2+C$, $y=\pm\sqrt{1/x^2+D}$

   (c) $y^4dy=-x^2dx$, $\frac{1}{5}y^5=-\frac{1}{3}x^3+C$, $y=\sqrt[5]{-\frac{5}{3}x^3+D}$

   (d) $dy/y=dx/(2x+3)$, $\ln Ky=\frac{1}{2}\ln(2x+3)=\ln\sqrt{2x+3}$, $Ky=\sqrt{2x+3}$, $y=A\sqrt{2x+3}$

   (e) $e^{-y}dy=dx/x^2$, $-e^{-y}=-1/x+C$, $e^{-y}=1/x+D$, $-y=\ln(1/x+D)$, $y=-\ln(1/x+D)$

   (f) $ydy=(5x+3)dx$, $\frac{1}{2}y^2=\frac{5}{2}x^2+3x+C$, $y=\pm\sqrt{5x^2+6x+D}$

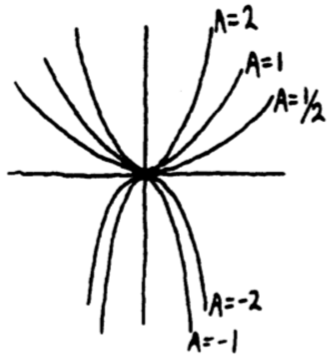
2. (a) $dy/y=xdx$, $\ln Ky=\frac{1}{2}x^2$, $Ky=e^{x^2/2}$, $y=Ae^{x^2/2}$, $3=Ae^{1/2}$, $A=3e^{-1/2}$, 그러므로 $y=3e^{-1/2}e^{x^2/2}=3e^{(x^2-1)/2}$

   (b) $ydy=(3-5x)dx$, $\frac{1}{2}y^2=3x-\frac{5}{2}x^2+C$, $x=2, y=4$를 대입하면 $C=12$를 얻는다. 그러면 $\frac{1}{2}y^2=3x-\frac{5}{2}x^2+12$, $y=\sqrt{6x-5x^2+24}$ ($x=2$일 때 y 값이 양수였으므로 양의 제곱근을 선택한다.)

   (c) $e^ydy=3xdx$, $e^y=\frac{3}{2}x^2+C$, $x=0, y=2$를 대입하면 $C=e^2$을 얻는다. 그러면 $e^y=\frac{3}{2}x^2+e^2$, $y=\ln(\frac{3}{2}x^2+e^2)$

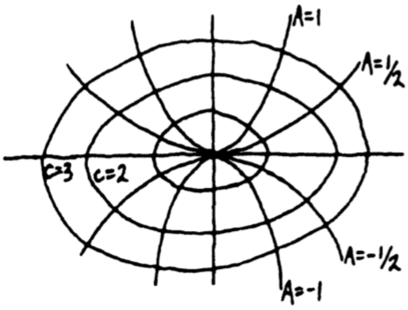
   (d) $dy/y^4=\cos xdx$, $-1/3y^3=\sin x+C$, $x=0, y=2$를 $C=-1/24$를 얻는다. $y=-1/\sqrt[3]{3\sin x-\frac{1}{8}}$.

3. (a) $dy/y=2dx/x$, $\ln Ky=2\ln x=\ln x^2$, $Ky=x^2$, $y=Ax^2$. (아래 그림 참조)

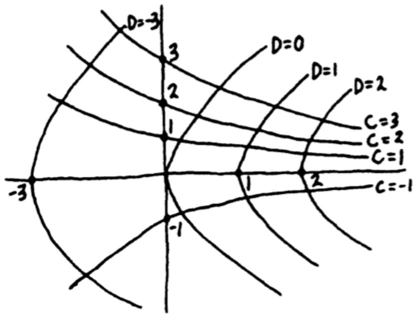


   (b) $3=4A$, $A=3/4$, $y=\frac{3}{4}x^2$

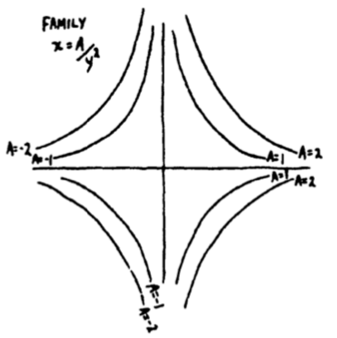
4. (a) x에 대해 미분한다. $2x+4yy'=0$, $y'=-x/2y$. 따라서 직교절선 집합은 $y'=2y/x$를 만족한다. $dy/y=2dx/x$, $\ln Ky=2\ln x=\ln x^2$, $Ky=x^2$, $y=Ax^2$ (아래 그림 참조)

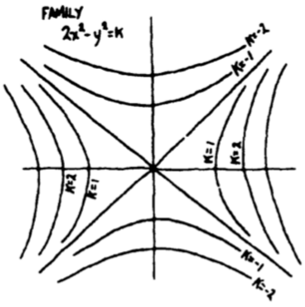


(b) C를 먼저 분리시켜 미분하여 없어지도록 한다. 즉, $ye^{3x} = C$. 그러면 x에 대해 미분하면 $y \cdot 3e^{3x} + y'e^{3x} = 0$, $y' = -3y$를 얻는다. 직교절선 집합은 $y' = 1/3y$를 만족한다. $ydy = \frac{1}{3}dx$, $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x + C$, $x = \frac{3}{2}y^2 + D$. (아래 그림 참조)



(c) x에 대해 미분하면 $4xdx - 2ydy = 0$. 직교절선 집합은 $4xdy + 2ydx = 0$을 만족한다. $dy/y = -dx/2x$, $\ln Ky = -\frac{1}{2}\ln x = \ln x^{-1/2}$, $Ky = 1/\sqrt{x}$, $x = A/y^2$. 원래 곡선의 집합은 모두 $y = \pm x\sqrt{2}$를 점근선으로 갖는 쌍곡선들의 집합이다. 직교절선 집합의 그래프는 $\lim_{y\to\infty} 1/y^2 = 0$, $\lim_{y\to-\infty} 1/y^2 = 0$, $\lim_{y\to 0} 1/y^2 = 1/0+ = \infty$임에 주의한다. (아래 그림 참조)





5. (a) $y'(t) = -\frac{1}{10}y(t)$, $dy/y = -dt/10$, $\ln Ky = -\frac{1}{10}t$, $Ky = e^{-t/10}$, $y = Ae^{-t/10}$

(b) $t = 0, y = 75$를 대입하면 $A = 75$를 얻는다. 해는 $y = 75e^{-t/10}$이다.

(c) (a)의 일반해에서 $t = 0$이면 $y = A$이다. 따라서 상수 A는 최초의 양을 나타낸다. 반감기를 구하기 위해서는 $y = \frac{1}{2}A$로 놓고 t에 대해 푼다. 즉 $\frac{1}{2}A = Ae^{-t/10}$, $\frac{1}{2} = e^{-t/10}$, $\ln\frac{1}{2} = -t/10$, $t = 10\ln 2$이다.

6. $m'(t) = \frac{1}{2}m(t)$, $dm/m = \frac{1}{2}dt$, $\ln Km = \frac{1}{2}t$, $Km = e^{t/2}$, $m = Ae^{t/2}$, $t = 0, m = 2$를 대입하면 $A = 2$를 얻는다. 따라서 $m(t) = 2e^{t/2}$이다. 그러면 $t = 3$이면 $m = 2e^{3/2}$가 된다.

7. $m\dfrac{dv}{dt} = mg - cv$, $\dfrac{dv}{cv - mg} = -\dfrac{dt}{m}$, $\dfrac{1}{c}\ln K(cv - mg) = -\dfrac{t}{m}$, $K(cv - mg) = e^{-ct/m}$, $cv - mg = Ae^{-ct/m}$, $v = \dfrac{mg}{c} + \dfrac{A}{c}e^{-ct/m}$, $t = 0, v = 0$을 대입하면 $A = -mg$를 얻는다. 따라서 해는 $v = \dfrac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$. $t = \infty$로 두면 정상 상태 속도 mg/c를 얻는다.