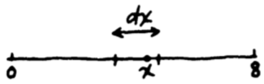
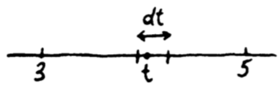
6장 적분의 응용
연습문제 해답

6.1 적분과 수학모델

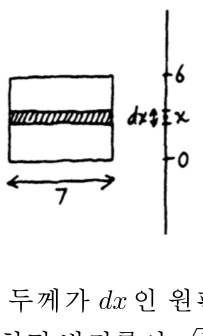
1. 아래 그림에 나타낸 철사 조각은 거의 일정한 밀도 x^3을 가지고 길이가 dx이므로 작은 철사 조각의 질량 $dm =$ 밀도 $\times$ 길이 $= x^3 dx$이고, 총 질량 $= \int_0^8 x^3 dx$이다.



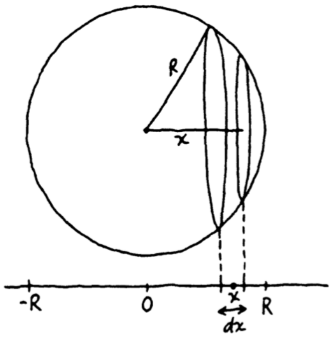
2. 시간 구간 $[3, 5]$를 생각하자. t시 근방의 dt 시간동안 속도는 t^2으로 거의 일정하다. dt 시간동안 이동한 거리 d거리 $=$ 속도 $\times$ 시간 $= t^2 dt$이고 총 이동한 거리는 $\int_3^5 t^3 dt$이다.



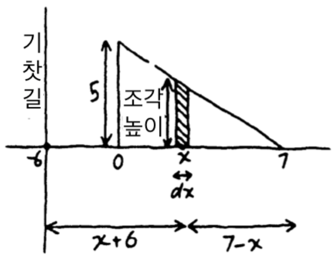
3. 아래 그림에 나타낸 높이가 x인 벽의 한 띠의 넓이는 $7dx$이므로 d비용 $= 10x^2 \times 7dx$이고 총비용은 $= \int_0^6 70x^2 dx$이다.



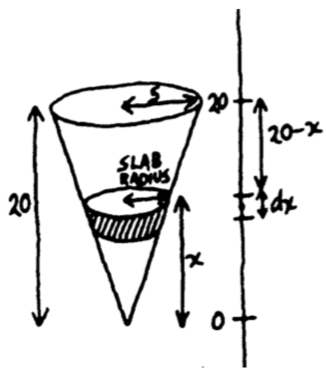
4. 아래 그림에서와 같이 위치가 x이고 두께가 dx인 원판을 생각하자. 이 원판의 반지름은 $\sqrt{R^2 - x^2}$이고 원판을 원통으로 간주하면 반지름이 $\sqrt{R^2 - x^2}$이고 높이는 dx이다. 원판의 부피 $dV = \pi r^2 h = \pi(R^2 - x^2)dx$이고 총 부피 $V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$이다.



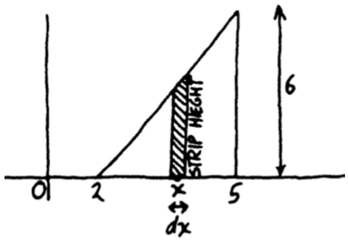
5. 토지를 작게 자른 아래 그림에 나타낸 조각은 폭이 dx 이고 기찻길까지의 거리는 $x+6$ 이다. 삼각형의 닮음에 의해 $\dfrac{\text{조각의 높이}}{7-x} = \dfrac{5}{7}$ 이므로 조각의 높이는 $\frac{5}{7}(7-x)$ 이다. 그러면 조각의 넓이는 $dA = \frac{5}{7}(7-x)dx$ 이고 토지의 가격은 d가격 $=$ 넓이 $\times$ 기찻길까지의 거리 $= \frac{5}{7}(7-x)dx \times (x+6)$ 이다. 총 토지 가격은 $= \int_0^7 \frac{5}{7}(7-x)(x+6)dx = \frac{5}{7}\int_0^7 (-x^2+x+42)dx = 137.1$ 이다.



6. 아래 그림에서와 같이 xm 위치에 있는 두께 dx 인 원판을 생각하자. 비례에 의해 $\dfrac{\text{원판 반지름}}{x} = \dfrac{5}{20}$ 이 성립하므로 원판의 반지름 $= x/4$ 이다. 이 원판을 반지름이 $x/4$ 이고 높이가 dx 인 원통으로 생각하자. 그러면 부피는 $dV = \pi r^2 h = \pi(x^2/16)dx$ 이고 무게는 d무게 $=$ 밀도 $\times$ 부피 $= \frac{1}{8}\pi x^2 dx$ 이다. 이 원판은 $20-x$ 만큼 이동시켜야 하므로 이 원판을 들어올리는 비용은 d비용 $=$ 무게 $\times$ 움직이는 거리 $= \frac{1}{8}\pi x^2 dx \times (20-x)$ 이고, 총비용은 $\int_0^{20} d$비용 $= \int_0^{20} \frac{1}{8}\pi x^2(20-x)dx = \frac{1}{8}\pi \int_0^{20}(-x^3+20x^2)dx$ 이다.



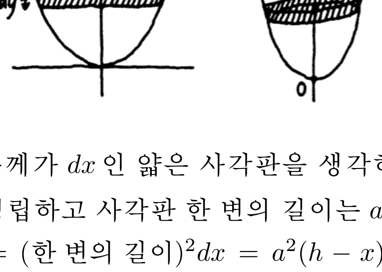
7. 아래 그림에서와 같이 축으로부터 거리가 x 이고 폭이 dx 인 조각을 생각한다. 비례에 의해 $\dfrac{\text{조각의 높이}}{x-2} = \dfrac{6}{3}$ 이 성립하므로 조각의 높이 $= 2(x-2)$ 이다. 조각의 면적은 $dA = bh = 2(x-2)dx$ 이고 조각의 무게는 d무게 $= 2\delta(x-2)dx$ 이고, 조각의 관성 모멘텀은 d모멘텀 $= md^2 = 2\delta(x-2)dx \times x^2$ 이다. 따라서 총 관성 모멘텀 $= 2\delta \int_2^5 x^2(x-2)dx$ 이다.



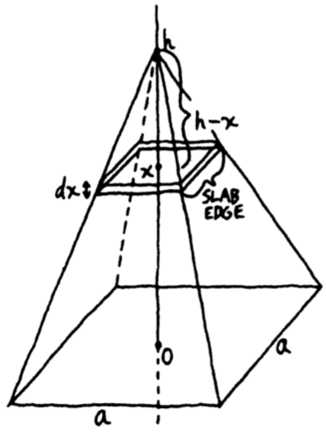
8. 만일 온도가 t 도이면 비열은 t^3 이고 dt 도 만큼 온도를 올리는 데 필요한 열량은 $dc = t^3 dt$ 이다. 그러므로 총 필요한 열량은 $\int_{54}^{61} t^3 dt$ 이다.

9. (a) 시간 구간 $[2, 4]$ 를 잘게 쪼갰고 dx 는 시간 x 근방의 아주 작은 시간을 나타낸다.
   (b) $\sum f(x)dx$ 는 타이핑한 총 단어의 수를 나타내므로, $f(x)dx$ 는 x 시간 근방의 dx 시간 동안 타이핑한 단어의 수 (즉, d 단어) 이다.
   (c) $f(x)dx$ 는 단어수이고 dx 는 분 (min) 이므로 $f(x)$ 는 단어/min, 즉 시간 x 일 때 순간 타이핑 속도이다. 만일 $f(3.2) = 25$ 라고 한다면, 비서가 3.2분에 25단어/min의 빠르기로 타이핑하고 있는 것이다.

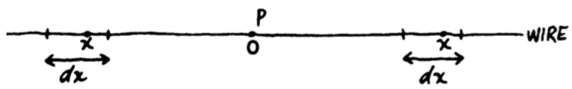
10. (a) 문제의 그림 (i) 에서의 얇은 조각은 높이가 dx 이고 반지름은 x^2 이므로 부피는 $dV = \pi r^2 h = \pi x^4 dx$ 이다. 따라서 입체의 총 부피는 $\int_0^2 \pi x^4 dx$ 이다.
    (b) 얇은 띠를 회전시키면 높이가 dy 이고 반지름이 $\sqrt{y}$ 인 작은 원판이 된다. 원판의 부피는 $dV = \pi r^2 h = \pi y dy$ 이고 총 부피 $= \int_0^4 \pi y dy$ 이다.



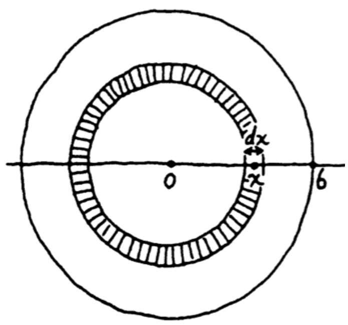
11. 바닥에서 x 만큼 떨어져 있고 두께가 dx 인 얇은 사각판을 생각하자. 그러면 비례에 의해 $\dfrac{\text{사각판 변의 길이}}{a} = \dfrac{h-x}{h}$ 가 성립하고 사각판 한 변의 길이는 $a(h-x)/h$ 이다. 사각판의 부피 = (밑면의 넓이) × 높이 = (한 변의 길이)$^2 dx = a^2(h-x)^2/h^2 \cdot dx$ 이다. 총 부피 $= (a^2/h^2) \int_0^h (h-x)^2 dx = (a^2/h^2) \cdot -\frac{1}{3}(h-x)^3\Big|_0^h = \frac{1}{3}a^2 h = \frac{1}{3}$ 밑면의 넓이 × 높이



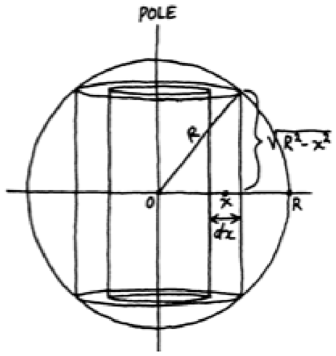
12. 편의상 점 P를 직선 위의 원점이라고 하자. 위치 x 근방에 길이가 dx로 매주 작은 직선 쪼가리는 점 P에서 거리가 대충 $|x|$이다 (x가 아니고 $|x|$). 따라서 d전하 = 전하 밀도 × 길이 $= e^{-|x|}dx$이고 총 전하 $= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2$ (5.6절의 연습문제 13번 참조)



13. 아래 그림에 나타낸 원형 껍데기 위의 점들은 모두 중심에서 거리가 대략 x이다. 따라서 이 껍데기에서의 밀도는 x^2이다. 껍데기의 반지름은 x, 두께는 dx이므로 넓이는 $dA = 2\pi x dx$이고 질량은 d질량 = 밀도 × 넓이 $= 2\pi x^3 dx$이고 총 질량은 $\int_0^6 2\pi x^3 dx$이다.



14. 아래 그림과 같이 반지름이 x, 두께가 dx인 원통형 껍질을 생각하자. 그러면 높이는 $2\sqrt{R^2 - x^2}$이고 부피는 $dV = 2\pi x \times 2\sqrt{R^2 - x^2}dx$ (식 4.29) 이고 무게는 d무게 $= 4\pi\delta x\sqrt{R^2 - x^2}dx$이다. 껍질은 대략적으로 축으로부터 거리가 모두 x이므로 모멘텀은 d모멘텀 $= 4\pi\delta x^3\sqrt{R^2 - x^2}dx$이고 (식 6.5), 총 모멘텀 $= 4\pi\delta \int_0^R x^3\sqrt{R^2 - x^2}dx$

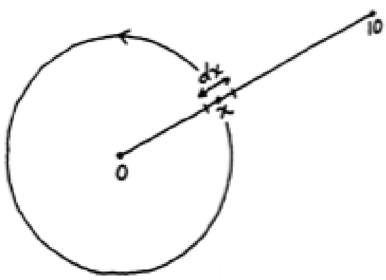


15. (a) 파이프라인을 여러 작은 조각으로 쪼갰고, dx는 x km 근방에 놓여 있는 대표적인 조각 하나의 길이다.

    (b) $g(x)dx$의 "합"은 총 비용이고, $g(x)dx$는 $x$km 근방의 길이가 dx인 조각 하나의 d비용이다.

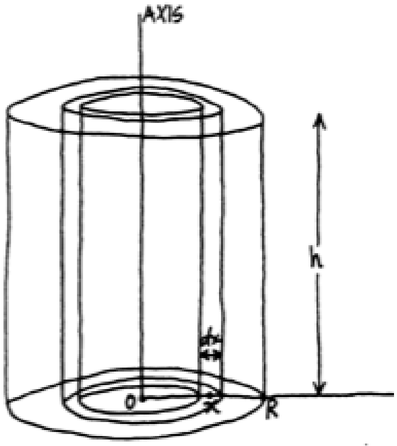
    (c) dx는 킬로미터이고, $g(x)dx$는 원이므로 $g(x)$는 원/km, 즉 x 킬로미터에 있는 파이프라인의 km 당 순간 비용이다. 만일 $g(4) = 17000$이면, 4km 지점에서 이 파이프라인은 km 당 17000원의 비용이 드는 상황이다.

16. 위치 x 근방에서 길이가 dx인 막대의 작은 조각을 생각한다. 이 조각 위의 모든 점은 (거의) 반지름 x의 원운동을 한다. 원의 둘레는 $2\pi x$이므로 이 조각은 속도 $v = 2\pi x$ cm/sec로 움직인다. 이 조각의 무게는 $3dx$이다 (밀도 $\times$ 길이). 운동에너지는 d에너지 $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 3dx(2\pi x)^2 = 6\pi^2x^2dx$이고 총 에너지 $= 6\pi^2 \int_0^{10} x^2dx$이다.

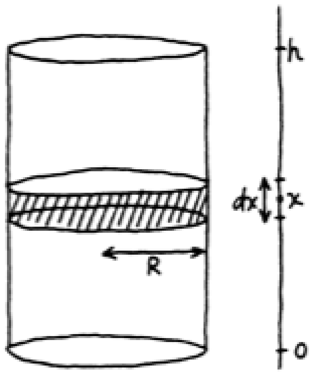


17. "부채꼴"을 작은 부채꼴들로 나눈다. 아래 그림에 표시한 부채꼴 조각은 중심각이 $d\theta$이고 대략 각 θ에 위치하고 있고 반지름이 $\cos\theta$이므로 넓이는 $dA = \frac{1}{2}d\theta\cos^2\theta$이다. 따라서 총 넓이는 $\frac{1}{2}\int_0^{\pi 4}\cos^2\theta d\theta$이다.

18. (a) 속이 꽉 찬 원기둥을 원통 모양의 껍질들로 쪼갠다 (여기서 껍질이 원통형인 모양이 중요한데 모든 점들이 축으로부터 거기가 (거의) 동일하기 때문이다). 반지름이 x이고 두께가 dx인 대표적인 껍질의 부피는 $dV = 2\pi xhdx$ (식 4.29)이고 축까지의 거리는 x이므로 밀도는 x이다. 질량은 d질량 $=$ 밀도 $\times$ 부피 $= 2\pi x^2hdx$이고 총 질량은 $2\pi h\int_0^R x^2dx$이다.



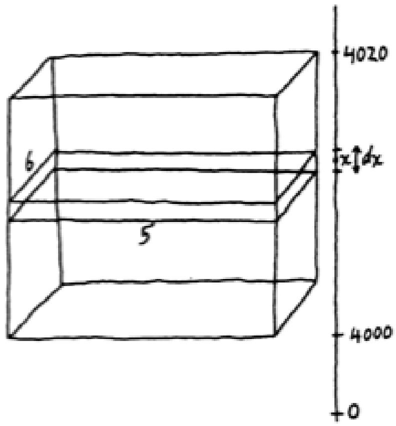
(b) 속이 꽉 찬 원기둥을 원기둥 모양의 얇은 판으로 쪼갠다 (여기서 원기둥 모양이 중요한데 얇은 원기둥에 속하는 모든 점들은 밑면으로부터 거리가 (거의) 동일하기 때문이다). 밑면으로부터 x 만큼 떨어져 있는 얇은 판의 높이는 dx 이고 반지름은 R 이므로 부피는 $dV = \pi R^2 dx$ 이다. 밀도는 x 이므로 d질량 $= \pi R^2 x dx$ 이고 총 질량 $= \pi R^2 \int_0^h x dx$ 이다.



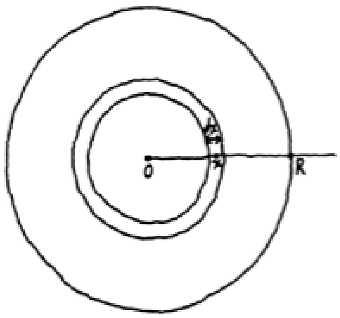
19. (a) 기계는 $225 - t^2 = 0$ 이 될 때까지 (수익이 있을 때까지) 운용한다고 하면 $t = 15$ 년

(b) 시간 구간 $[0, 15]$ 를 생각한다. t 년 근방의 dt 년 동안 이 기계가 매년마다 $225 - t^2$ 천원씩 벌어들이므로 d수익 $= (225 - t^2)dt$ 이고 총 수익 $= \int_0^{15}(225 - t^2)dt$ 이다.

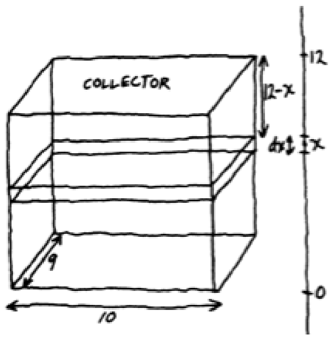
20. 지면으로부터 x 만큼 떠 있는 얇은 판은 $5 \times 6 \times dx$ 의 크기이고 부피는 $dV = 30dx$ 이다. 질량 밀도가 δ 이므로 질량은 $dm = 30\delta dx$ 이고 무게는 $dw = 30\delta dx/(2 + x^2)$ 이다. 따라서 총 무게는 $\int_{4000}^{4020} 30\delta/(2 + x^2)dx$ 이다.



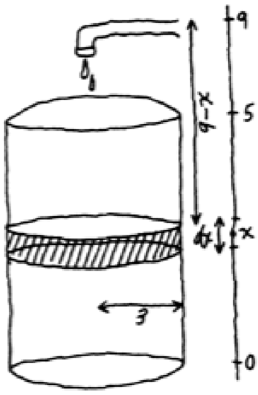
21. 링 형태의 모든 점들은 관개 펌프로부터 (거의) 모두 x 만큼 떨어져 있다. 이 링은 반지름이 x 이고 두께가 dx 이므로 넓이는 $dA = 2\pi x dx$ (식 4.28) 이고 d 비용 $= 2\pi x dx \times x^3$ 이다. 따라서 총 비용 $= 2\pi \int_0^R x^4 dx$ 이다.



22. 아래 그림에 나타낸 얇은 판은 집열판으로부터 거리 $d = 12 - x$ 만큼 떨어져 있고, 크기는 $9 \times 10 \times dx$ 이다. 따라서 부피 $dV = 90dx$ 이고 수집된 열 d 열 $= 90dx/(12 - x + 1)$ 이다. 총 수집된 열 $= \int_0^{12} 90/(13 - x)dx$ 이다.



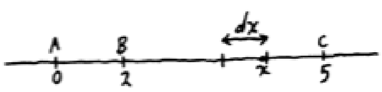
23. 아래 그림에 나타낸 원기둥형 얇은 판은 반지름이 3이고 높이가 dx 이고 이 원기둥형 얇은 판에 들어 있는 물들은 (거의) 모두 $9 - x$ 만큼 떨어진다. 부피가 $dV = 9\pi dx$ 이므로 d 퇴 $= 9\pi dx \times (9 - x)$ 이다. 따라서 총 튀는 양 $= 9\pi \int_0^5 (9 - x)dx$ 이다.



24. 움직인 전하가 x 위치에 있다고 한다면, 점 A로부터 거리는 x 다. 그러면 dx 만큼 더 가깝게 끌어당기는 데 필요한 작용력은 $(1/x^2)dx$ 이다 (거리 $\times$ 거리당 작용력)

    (a) C부터 B까지 움직이는 데 필요한 총 작용력은 $\int_2^5 1/x^2 dx = -1/x\big|_2^5 = 3/10$

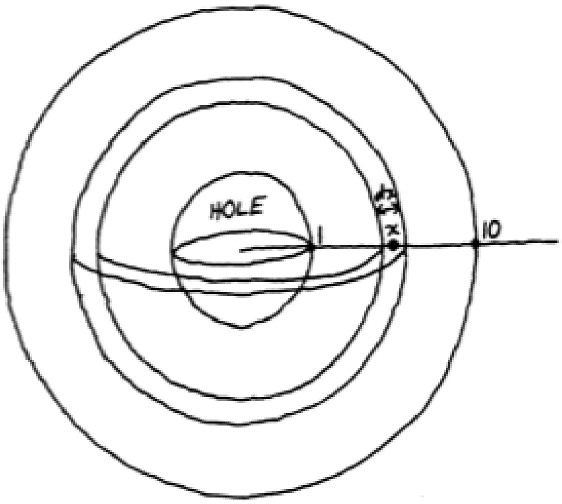
    (b) $\int_0^5 1/x^2 dx = -1/x\big|_{0+}^5 = -\frac{1}{5} + \infty = \infty$



25. (a) 시간 t 근방에서 매우 작은 시간 dt 동안 눈이 $R(t)$ 눈송이/h의 빠르기로 내리고 있으므로 d눈송이 $= R(t)dt$ 이고 총 눈의 양 $= \int_0^{10} R(t)dt$ 이다.

    (b) 시간 t 근방에서 dt 시간동안 $R(t)dt$ 만큼의 눈이 땅에 닿지만, 남은 $10 - t$ 시간 동안, 단지 땅에 닿은 눈의 $\dfrac{1}{(10-t)+1}$ 만큼만 남아 있게 된다. 따라서 d(남아 있는 눈의 양) $= R(t)dt/(11-t)$ 이고 총 남아 있는 눈의 양 $= \int_0^{10} R(t)/(11-t)dt$ 이다.

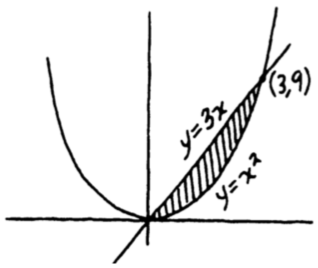
26. 아래 그림에 표시된 양파 모양의 껍질은 두께가 dx 이고 반지름이 x 이므로 겉넓이는 $4\pi x^2$ 이다. 이 껍질을 뚫고 지나가는 전류는 $L = dx$ 만큼 지나가고 저항은 $dR = dx/4\pi x^2$ 이 된다. 따라서 총 저항 $R = (1/4\pi)\int_0^{10} 1/x^2 dx$ 이다.



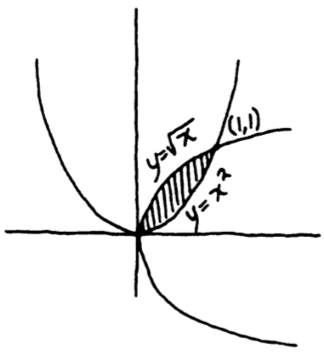
6.2 반구체의 무게중심

6.3 영역의 넓이와 곡선의 길이

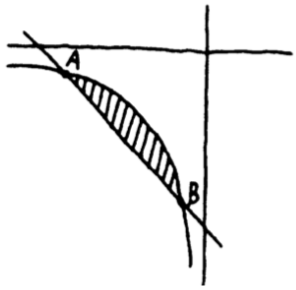
1. (a) $u(x) = 3x$, $l(x) = x^2$. 넓이 $= \int_0^3 (3x - x^2)dx = (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)\big|_0^3 = \frac{9}{2}$



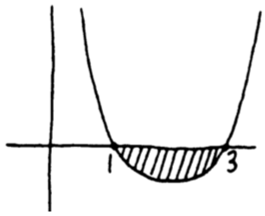
(b) $x = y^2$의 그래프는 포물선이다. 위쪽 부분은 $y = \sqrt{x}$ 이므로 $u(x) = \sqrt{x}$, $l(x) = x^2$. 넓이 $= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = (\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3)\big|_0^1 = \frac{1}{3}$



(c) 직선 AB의 방정식은 $y = -4x - 12$ 이고 $u(x) = 8/x$, $l(x) = -4x - 12$. 넓이 $= \int_{-2}^{-1} (8/x - (-4x - 12))dx = (8\ln|x| + 2x^2 + 12x)\big|_{-2}^{-1} = 6 - 8\ln x$



(d) 포물선이 x-축을 지나는 점이 필요하다. $x^2 - 4x + 3 = 0$, $(x-3)(x-1) = 0$으로부터 $x = 3, 1$. 넓이 $= -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = -(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x)\big|_1^3 = \frac{4}{3}$



2. (a) $A = (\pi/4, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $B = (5\pi/4, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$. 점 A의 왼편에서는 $u(x) = \cos x$, $l(x) = \sin x$이고 점 A와 점 B 사이에서는 이 관계가 역전된다. 넓이 $= \int_0^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4}(\sin x - \cos x)dx = (\sin x + \cos x)\big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = (\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 1$

(b) $A = (-2, 4)$, $B = (\frac{1}{4}, 4)$, $C = (1, 1)$. 넓이 $= \int_{-2}^{1/4}(4 - x^2)dx + \int_{1/4}^{1}(1/x - x^2)dx = (4x - \frac{1}{3}x^3)\big|_{-2}^{1/4} + (\ln x - \frac{1}{3}x^3)\big|_{1/4}^{1} = (1 - \frac{1}{192} + 8 - \frac{8}{3}) + (-\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{4} + \frac{1}{192}) = 6 + \ln 4$

3. (a) $dy = e^x dx$, $ds = \sqrt{dx^2 + (e^x dx)^2} = \sqrt{1 + e^{2x}}dx$, $s = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 + e^{2x}}dx$

(b) $dx = 3y^2 dy$, $ds = \sqrt{9y^4 dy^2 + dy^2} = \sqrt{1 + 9y^4}dy$, $s = \int_{y=0}^{y=4} \sqrt{1 + 9y^4}dy$

(c) $y = 1/x$, $dy = -(1/x^2)dx$, $ds = \sqrt{1 + 1/x^4}dx$, $s = \int_{x=1}^{2} \sqrt{1 + 1/x^4}dx$

(d) $dx = 2dt$, $dy = 2tdt$, $ds = \sqrt{(2dt)^2 + (2tdt)^2} = 2\sqrt{1 + t^2}dt$. 점 $(3,\ 1)$은 $t = 1$에 해당하고 점 $(9,\ 16)$은 $t = 4$에 해당하므로 $s = 2\int_{t=1}^{t=4} \sqrt{1 + t^2}dt$

4. 직선 AB의 방정식은 $y = m(x - x_1) + y_1$이고 여기서 $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$이다. 그러면 $dy = mdx$이고 $ds = \sqrt{dx^2 + m^2dx^2} = \sqrt{1 + m^2}dx$이다. $x_2 > x_1$이라고 가정하면 $s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + m^2}dx$인데 $\sqrt{1 + m^2}$은 상수임에 주의한다. 따라서

$$
\begin{aligned}
s &= \sqrt{1 + m^2}(x_2 - x_1) \\
&= \sqrt{1 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}} \cdot (x_2 - x_1) \\
&= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}} \cdot (x_2 - x_1) \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}
\end{aligned}
$$

즉, 기존에 알고 있는 두 점 사이의 거리 공식과 같다.

6.4 원뿔과 구의 겉넓이

6.5 적분구간이 변수인 적분

1. $(\frac{1}{2}t^2 + 5t)\Big|_{t=2}^{t=x} = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 12$

2. (a) 그림에 표시한 선의 한 조각은 A로부터 x만큼 떨어져 있고 이 조각에서 전하밀도는 e^{-x}이므로 d전하 $= e^{-x}dx$이다. 총 전하량 $= \int_0^\infty e^{-x}dx$

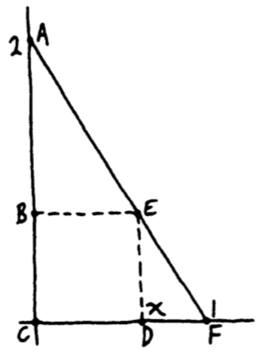
   (b) $\int_0^x e^{-t}dt$

3. (a) 오후 3시부터 약 x시간 후, dx 시간 동안 내리는 d강수량 $= x^3dx$이므로 총 강수량 $= \int_0^2 x^3dx$

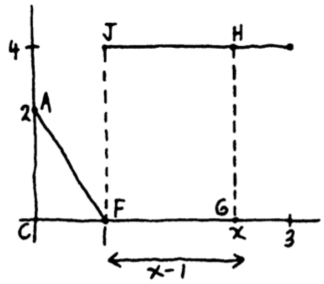
   (b) $\int_0^x t^3dt$

4. (아래 그림 참조)

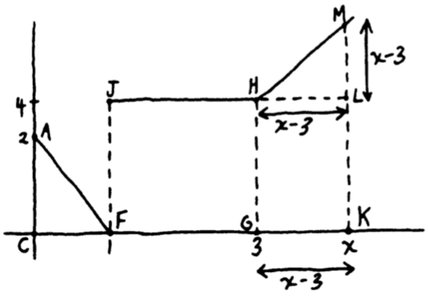
   - 경우 1 ($0 \le x \le 1$) 삼각형이 닮음으로부터 $2/1 = \overline{ED}/(1-x)$, $\overline{ED} = 2-2x$이다. 그러면 $\overline{AB} = 2-(2-2x) = 2x$. $I(x) =$ ABCD의 넓이 $=$ ABE $+$ BCDE $= x^2 + x(2-2x) = 2x - x^2$



   - 경우 2 ($1 \le x \le 3$) $I(x) =$ ACF(경우1로부터 $I(1)$을 사용할 수 있음) $+$ FGHJ $= 1 + 4(x-1) = 4x - 3$



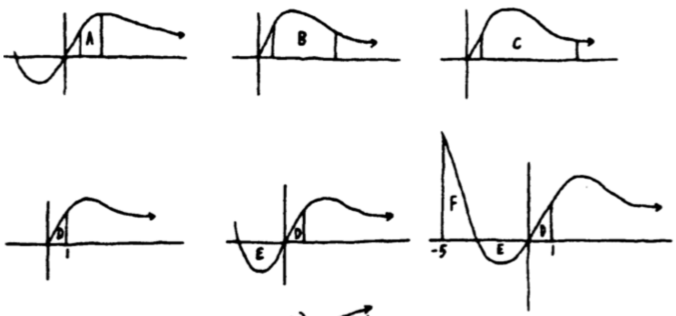
   - 경우 3 ($x \ge 3$) $I(x) =$ ACF $+$ FGHJ (이 두 항의 합은 경우 2로부터 $I(3)$을 사용할 수 있음) $+$ HLM $+$ GHLK $= 9 + \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4(x-3) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

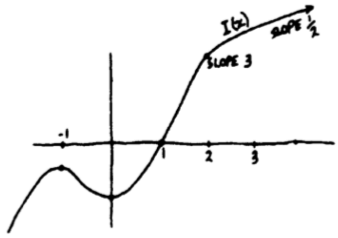


정리하면

$$I(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ,0 \le x \le 1 \\ 4x - 3 & ,1 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} & ,x \ge 3 \end{cases}$$

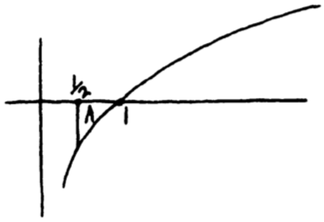
5. (아래 그림 참조) $I(1) = 0$, $I(2) = \int_1^2 f(t)dt =$ 넓이 A, $I(3) = \int_1^3 f(t)dt =$ 넓이 B, $I(10)$ $=$ 넓이 C, $I(0) = \int_1^0 f(t)dt = -D$, $I(-1) = E - D$, $I(-5) = E - D - F$ 등등. 점들을 찍어 대략적인 그래프를 그릴 수 있다. 또한 $I'(x) = f(x)$ 라는 사실도 이용할 수 있다. 즉, I 의 그래프는 $x = 0, -1$ 에서 기울기가 0 이고, $x = 2$ 에서는 기울기가 3 이고, 더 큰 x 에 대해서는 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이며 $-\infty$ 에서는 기울기가 ∞ 다.





6. (a) $I(\frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} f(t)dt = \int_0^{1/2} dt = \frac{1}{2}$
   (b) $I(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 dt + \int_1^2 \frac{1}{t}dt = 1 + \ln t\Big|_1^2 = 1 + \ln 2$
   (c) 만일 $0 \le x \le 1$ 이면, $I(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x dx = x$, 만일 $x > 1$ 이면 $I(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 dt + \int_1^x (1/t)dt = 1 + \ln t\Big|_1^x = 1 + \ln x$. 그러므로 $I(x)$ 는 $0 \le x \le 1$ 이면 x 이고 $x > 1$ 이면 $1 + \ln x$ 이다.

7. (a) $J(x)$ 는 $I(x)$ 보다 "추가적으로" $\int_{1/2}^1 \ln t dt$ 만큼 더 있다. 그런데 이 추가적인 양은 아래 그림에서 $-A$ 와 같이 음수이다. 따라서 $J(7)$ 이 $I(7)$ 보다 더 작다. 즉 $J(7) = I(7) - A$.



(b) 두 그래프는 평행한 곡선이다. $J(x)$ 그래프가 A 만큼 아래에 있다.

8. (a) $(2/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$

   (b) e^{-x}/x

   (c) (b) 에서 계속. $D(e^{-x}/x) = (-xe^{-x} - e^{-x})/x^2$

9. $I'(x) = \sin x^2$, $I''(x) = 2x\cos x^2$

10. $Si'(x) = (\sin x)/x$ 이므로 $x = \cdots, -\pi, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 에서 $Si'(x) = 0$ 이다. (만일 $x = 0$ 이면 $Si'(x) = (\sin 0)/0$ 이고 실제로 1 이다 (4.3 절 참조). 그러므로 $x = 0$ 은 임곗점이 아니다) $Si''(x) = (x\cos x - \sin x)/x^2$. $Si''(-\pi) = 1/\pi$ 이고 양수다. 즉 2 계도함수 판정법에 의해 $Si(x)$ 는 $x = -\pi$ 에서 극소다. $Si''(\pi) = -1/\pi$ 이고 음수다. 그러므로 $x = \pi$ 에서 극대다. $Si''(2\pi)$ 는 양수고 따라서 $x = 2\pi$ 에서 극소다. 등등

11. $f(x) = Si(x^3)$ 이므로 $f'(x) = 3x^2 Si'(x^3)$. 그런데 $Si'(x) = (\sin x)/x$ 이므로 $Si'(x^3) = (\sin x^3)/x^3$ 이고 $f'(x) = (3\sin x^3)/x$.

12. (Si 가 $\int_0^0$ 이 되므로) 분자 $\to$ 0. 따라서 극한은 0/0. 로피탈 정리를 쓴다. $\lim Si'(x)/1 = \lim(\sin x)/x = 0/0 = \lim(\cos x)/1 = 1$

13. (a) $(\frac{1}{2}x^2 - 5x)\Big|_4^2 = -8 - (-12) = 4$

    (b) $\frac{1}{2}\ln(2x+5)\Big|_2^0 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 9$