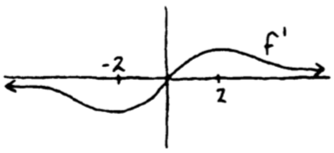
3장 미분
연습문제 해답

3.1 개요

3.2 미분의 정의와 응용

1. $x = 0$에서 기울기는 0이므로 $f'(0) = 0$. $x = -100$에서 곡선이 천천히 떨어지고 있으므로 $f'(-100)$은 작은 음수다. 비슷하게 $f'(100)$은 작은 양수다. $x = 2$에서의 기울기는 양수이고 이 곡선에서 가장 큰 기울기이므로 $f'(2)$는 양수이고 아래 그림에서와 같이 f'의 그래프는 $x = 2$에서 꼭짓점을 갖는다.



2. p가 증가한다면, S는 감소한다. dS/dp는 음수일 것이다.

3. 미분값이 음수이므로, t가 증가할수록 y는 감소한다. 우물벽의 끝부분까지의 거리가 줄어들고 있고 따라서 두레박은 초당 2미터씩 위로 움직이고 있는 중이다.

4. x가 증가한다면, y가 증가한다. 따라서 x가 감소한다면 y는 감소한다.

5. (a) 13.7살일 때, 년간 2센치미터로 자라고 있다. 그러므로 14살까지 2cm/년 $\times$ 0.3 년 = 0.6cm 더 자랄 것이다.
   (b) 13.7살인 순간에 미분값이 2인데, 13.7살부터 14살까지 그대로 이 값(2)을 유지하지 않을 수도 있기 때문이다.

6. (a) $[0, x + \Delta x]$ 주민의 수 - $[0, x]$ 주민의 수 = $[x, x + \Delta x]$ 주민의 수
   (b) 구간 $[x, x + \Delta x]$에서의 인구밀집도 (km당 주민의 수)
   (c) x 위치에서의 순간 인구밀집도
   (d) 인구 밀집도는 음수가 될 수 없다.

7. (a) 선희의 월급이 광수 월급이 오른 것보다 두 배 오른다.
   (b) 선희의 월급이 광수 월급이 오른 것의 반만 오른다.

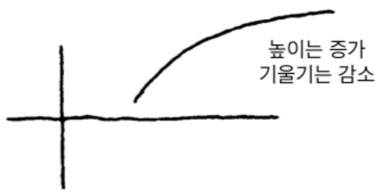
(c) 선희의 월급은 광수 월급이 오른 것만큼 줄어든다.

(d) 선희의 월급은 변함이 없다.

8. $f'(x)$의 단위는 킬로미터당 리터이고 (리터당 킬로미터가 아니고) 언제나 양수이다. 밴형 승용차는 1km를 가는 데 오토바이보다 더 많은 양의 기름이 들고, 따라서 밴형 승용차의 f'의 값이 오토바이보다 크다.

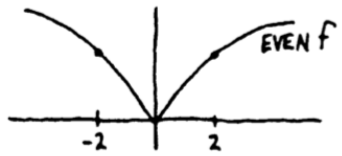
9. (a) 문제의 의미는 두 곡선이 $x = 2$에서 높이가 같다면 기울기도 같다는 것이므로 거짓이다.

(b) 높이가 증가하더라도 기울기가 증가하지 않을 수 있다. (아래 그림 참조)



(c) 참이다. 곡선이 반복되면 기울기도 반복된다.

(d) 거짓이다. f가 우함수이면 그래프가 y-축에 대해 대칭이다. 예를 들어 $x = -2$에서의 기울기는 $x = 2$에서의 기울기와 반대다. 실제로 $f'(-x) = -f'(x)$이므로 f'은 기함수다. (아래 그림 참조)



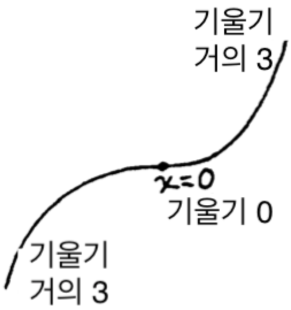
10. (시각 6일 때 차량의 속도) > (위치 $f(6)$에서의 제한 속도)이므로 $|f'(6)| > L(f(6))$. ($f'(6) > L(6)$이 아님)

11. (a) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} 1 = 1$

(b) f의 그래프는 직선 $y = x$이다. 모든 점에서 기울기가 1이므로 $f'(x) = 1$이다.

(c) 수직선 위의 한 물체가 시각 t일 때 위치가 $f(t)$이면, 이 물체는 시간당 1km의 속도로 오른쪽으로 움직이고 있다. 따라서 $f'(t) = 1$이다.

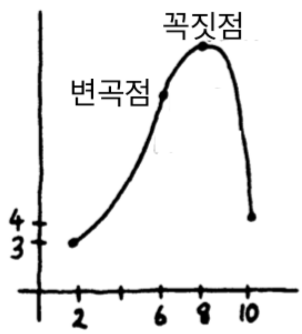
12. g'의 그래프로부터, x는 -10000이면 $g'(x)$는 3에 가깝고, $x = 0$일 때 0으로 줄어들다가 다시 증가하여 $x \to \infty$일 때 3으로 다가간다. 따라서 g의 그래프는 왼쪽 끝에서는 거의 3에 가까운 기울기를 갖고, 0으로 줄어들다가 다시 3을 향해 증가한다. g의 그래프의 높이에 대해서는 정보가 없다. (아래 그림 참고)



13. (a) 온도는 시간당 6°씩 오르고 있다. (나쁜 소식) 그러나 이 시간당 6°라는 숫자는 매시간마다 시간당 4°만큼씩 떨어지고 있는 중이다. (좋은 소식)
    (b) 온도는 시간당 6°씩 내리고 있다. (좋은 소식) 그리고 이 시간당 −6°라는 숫자는 매 시간마다 시간당 4°만큼씩 더 떨어지고 있는 중이다 (더 좋은 소식)
    (c) 온도는 변하고 있지 않다. 여전히 높은 온도가 유지되는 중이다.

14. (a) 시간당 1km/h만큼씩 가속하면서 4 km/h의 빠르기로 왼쪽으로 움직이고 있다.
    (b) 시간당 2km/h만큼씩 감속하면서 5km/h의 빠르기로 오른쪽으로 움직이고 있다.
    (c) 잠시 멈춰있겠지만, 시간당 2km/h만큼씩 가속하는 중이다.
    (d) 2km/h의 빠르기로 오른쪽으로 움직이고 있고, 이 순간에 빠르기는 변하지 않는다.

15. 그래프는 $[2, 8]$ 구간에서 올라가고, $[8, 10]$ 구간에서는 떨어진다. 구간 $[2, 6]$에서는 아래로 볼록하고 구간 $[6, 10]$에서는 위로 볼록하다. (아래 그림 참고)



16. 1계도함수 f'은 운전대 회전 당 앞바퀴의 회전인 "조향 비율"이다. 어떤 회전각에서의 조향이 다른 회전각에서의 조향보다 더 민감한 것은 바람직하지 않다. 즉 일정한 f'을 원한다. 따라서 $f'' = 0$이 필요하다.

17. f'은 구간 $[3, 4]$에서 양수다. 따라서 f는 증가하는데, 처음에는 좀 더 급하게 증가하다가(x단위당 5 f 단위씩) 점점 천천히 증가한다(x 단위당 1 f 단위씩). f'이 구간 $[3, 4]$에서 감소하므로, 이 구간에서 f''은 음수다.

18. (a) 첫 60 배럴을 정제하는 데 총 400만큼의 비용이 든다.

(b) $f'(x)$는 x배럴이 막 제조라인에서 나오는 순간에 배럴당 순간 정제 비용이다. 주어진 데이터에 의하면, 60배럴이 막 정제되어 나온 직후에는 순간 추가 정제 비용은 배럴당 21이지만, 100배럴을 만들어낸 후에는 정제 공정이 더 효율적이 되어서 추가 정제 비용은배럴당 10만큼밖에 되지 않는다(101번째 배럴을 생산하는 것이 61번째 배럴을 생산하는것보다 더 싸다).

(c) 첫 10배럴의 총 비용은 200이고, 배럴당 평균 20이다. 10번째 배럴 후 순간 비용은 배럴당 단지 3이고 그때까지의 평균보다 훨씬 작다. 10배럴 이상을 생산한다면 정제 공정이 훨씬 효율적이다.

3.3 기본 함수의 미분

1. (a) $6x^5$
   (b) $D_x x^{-6} = -6x^{-7} = -6/x^7$
   (c) $\frac{8}{7}e^{1/7}$
   (d) $D_u u^{1/3} = \frac{1}{3}u^{-2/3}$
   (e) $\dfrac{dx^{-1/2}}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$
   (f) $\frac{2}{3}x^{-1/3}$
   (g) 0
   (h) e^t
   (i) 0

2. $1/z$

3. $y' = 1$

4. $f'(x) = 0$

5. $\sec^2 t$

6. (a) $y' = 1/x,\ y'' = D_x x^{-1} = -x^{-2} = -1/x^2$
   (b) $y' = \cos x,\ y'' = -\sin x$
   (c) $y' = e^x,\ y'' = e^x$

7. $f'(x) = D_x x^{-1/2} = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -1/2x^{3/2},\ f'(17) = -1/2\sqrt{17^3} = -1/(2\cdot 17\sqrt{17}) = -1/(34\sqrt{17})$

8. $f(\pi) = \sin\pi = 0,\ f'(x) = \cos x,\ f'(\pi) = \cos\pi = -1$

9. (a) $-3x^{-4}$
   (b) $14x^{13}$
   (c) $D_x x^{1/5} = \frac{1}{5}x^{-4/5}$
   (d) $D_x x^{-5} = -5x^{-6} = -5/x^6$

(e) 1

(f) $1/x$

(g) $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$

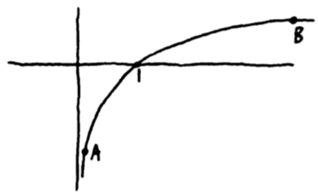
(h) $4x^3$

(i) $D_x x^{-4} = -4x^{-5} = -4/x^5$

(j) $D_x x^{-1} = -x^{-2} = -1/x^2$

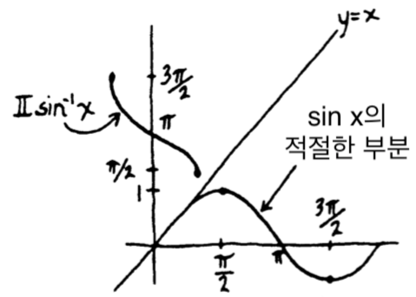
(k) $D_x x^{-2} = -2x^{-3} = -2/x^3$

10. 곡선은 점 B에서 천천히 올라가고 따라서 기울기는 작은 양의 값이다. 점 B에서 x의 값이 크기 때문에 점 B에서의 $1/x$의 값도 또한 작은 양의 값이다. 곡선은 점 A에서 매우 급하게 올라가고 따라서 기울기는 큰 양의 값이다. 점 A에서 x의 값은 0보다 약간 더 큰 값이므로 점 A에서 $1/x$의 값도 또한 큰 양수다. (아래 그림 참조)



11. $y = \tan^{-1} x$라고 하자. 그러면 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$일 때 $x = \tan y$이고 $dy/dx = 1/(dx/dy) = 1/\sec^2 y = 1/(1+\tan^2 y) = 1/(1+x^2)$.

12. (a) $\frac{1}{2}\pi$와 $3\pi/2$사이의 $\sin x$의 일부분을 $y = x$에 대해 대칭시킨다. (아래 그림 참조)



(b) $\Pi \sin^{-1} x$위의 모든 기울기는 음수인 반면 $1/\sqrt{1-x^2}$는 양수이므로 $D_x \Pi \sin^{-1} x$는 $1/\sqrt{1-x^2}$이 될 수 없다. 올바른 미분을 얻는 한 가지 방법은 식(3.18)로 돌아가는 것이다. 그런데 이제 y는 $\frac{1}{2}\pi$와 $3\pi/2$ 사이의 각이므로 코사인값은 음수다. 따라서 $\cos y = -\sqrt{1-x^2}$이고 $D_x \Pi \sin^{-1} x = -1/\sqrt{1-x^2}$이다.

13. $\dfrac{da}{db} = -4b^{-5}$이다. $b = a^{-1/4}$이므로 $\dfrac{db}{da} = -\frac{1}{4}a^{-5/4}$이다. 그러면 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{\dfrac{db}{da}} = -4a^{5/4} = -4(b^{-4})^{5/4} \quad (a = b^{-4} \text{ 이므로})$$
$$= -4b^{-5}$$

따라서 역함수의 미분은 서로 역수다.

14. (a) 미분하면 속도 $\cos t$를 얻고, $t = 2\pi/3$일 때 이 값은 $-\frac{1}{2}$이다. 속력은 1/2 m/sec다.

    (b) 다시 한 번 더 미분하면 가속도 $-\sin t$를 얻고, $t = 2\pi/3$에서 이 값은 $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$이다. 속도와 가속도의 부호가 동일하므로 이 물체는 속력이 증가하고 있는 중이다. 즉 초당 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$씩 증가하고 있다.

    (c) 속력은 $|\cos t|$이다. 이 값은 $t = 0, \pi, 2\pi$ 등에서 (최댓값 1)로 최대다. $t = -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ 등에서 (최솟값 0)으로 최소다.

15. $y' = 4x^3$이므로 $(-2, 16)$에서 기울기는 $4(-2)^3 = -32$다. 그러므로 접선의 방정식은 $y - 16 = -32(x+2)$이다. 법선의 기울기는 $\frac{1}{32}$이고 법선의 방정식은 $y - 16 = \frac{1}{32}(x+2)$다.

3.4 미분 불가능 함수

3.5 상수곱, 합, 곱, 분수식의 미분

1. (a) $18x^5 - \sin x$

   (b) $10x^4 - 18x^2 - 4$

2. (a) $y = x^{-1},\ y' = -x^{-2},\ y'' = 2x^{-3},\ y''' = -6x^{-4},\ y^{(4)} = 24x^{-5} = 24/x^5$

   (b) $y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{(4)} = \sin x$

   (c) $y' = 1,\ y'' = 0,\ y''' = 0,\ y^{(4)} = 0$

3. (a) $\frac{3}{2}x^2$

   (b) $6x^2$

   (c) $D2x^{-3} = -6x^{-4} = -6/x^4$

   (d) $D\frac{1}{2}x^{-3} = -\frac{3}{2}x^{-4} = -3/2x^4$

   (e) $\frac{1}{3}(3x^2 + 2)$

   (f) (곱 법칙) $-2x^3 \sin x + 6x^2 \cos x$

   (g) $\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-1/2} \ln x = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

   (h) $\sec x \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot \sec x \tan x = \sec^3 x + \tan^2 x \sec x$

   (i) $2e^x(1/x) + 2e^x \ln x + 10x$

   (j) $2e^x + 1/x$

   (k) $4x^2/(1+x^2) + 8x \tan^{-1} x$

   (l) $x^3 \sin x \sec^2 x + x^3 \cos x \tan x + 3x^2 \sin x \tan x$

   (m) $-3x^{-2} = -3/x^2$

   (n) $D\frac{1}{3}x^{-1} = -\frac{1}{3}x^{-2} = -1/3x^2$

4. (a) $f'(r) = 5r^4,\ f''(r) = 5 \cdot 4r^3,\ \cdots,\ f^{(5)}(r) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

   (b) $f^{(4)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,\ f^{(5)}(r) = 0$

5. $f(-2) = 48+4 = 52,\ f'(x) = 12x^3 - 2,\ f''(x) = 36x^2,\ f'(-2) = -96 - 2 = -98,\ f''(-2) = 144$

6. (a) (곱 법칙) $xe^x + e^x$

   (b) $xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x$

   (c) $xe^x + e^x + 2e^x = xe^x + 3e^x$

   (d) 앞의 결과를 일반화 시키면 $xe^x + ne^x$

7. (a) $\dfrac{(6x+x^2)3-(1+3x)(6+2x)}{(6x+x^2)^2} = -\dfrac{3x^2+2x+6}{(6x+x^2)^2}$

   (b) $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

   (c) $\dfrac{(1+3e^x)(xe^x+e^x)-xe^x\cdot 3e^x}{(1+3e^x)^2} = \dfrac{xe^x+e^x+3e^{2x}}{(1+3e^x)^2}$

8.

$$\begin{aligned} D\sec x = D\frac{1}{\cos x} &= \frac{\cos x\cdot 0-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\tan x \end{aligned}$$

9. (a) $f(x) = \begin{cases} \sin x & ,0 \le x \le \pi \\ -\sin x & ,\pi \le x \le 2\pi \\ \sin x, & ,2\pi \le x \le 3\pi \text{ 등등} \end{cases}$ 그러므로 $f'(x) = \begin{cases} \cos x & ,0 < x < \pi \\ -\cos x & ,\pi < x < 2\pi \\ \cos x, & ,2\pi < x < 3\pi \text{ 등등} \end{cases}$

   (b) $f'(x)$는 $x \le 2$일 때는 $6x^2$이고 $x > 2$일 때는 0.

10. $y' = 6x^2 + 6$이고 $(1,8)$에서의 기울기는 $y'|_{x=1} = 12$. 접선의 방정식은 $y - 8 = 12(x-1)$, 즉 $y = 12x - 4$다.

11. $y' = -4x^3, y'|_{x=2} = -32$. 법선의 기울기는 $\frac{1}{32}$. 법선의 방정식은 $y + 11 = \frac{1}{32}(x-2)$.

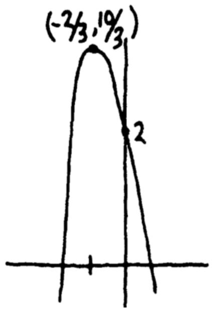
12. (a) $y' = \cos x,\ y'' = -\sin x$이고 y''의 값은 $0 < x < \pi$일 때 양수, $\pi < x < 2\pi$일 때 음수 등등이다. 따라서 사인 곡선은 $[0,\pi]$에서는 위로 볼록, $[\pi, 2\pi]$에서는 아래로 볼록이다. (1.3절의 [그림 1-27] 참조)

    (b) $y' = 3x^2,\ y'' = 6x$이고 y''의 값은 $x > 0$이면 양수, $x < 0$이면 음수다. 그러므로 x^3은 $x < 0$에서는 위로 볼록, $x > 0$에서는 아래로 볼록이다. (1.2절의 [그림 1-16] 참조)

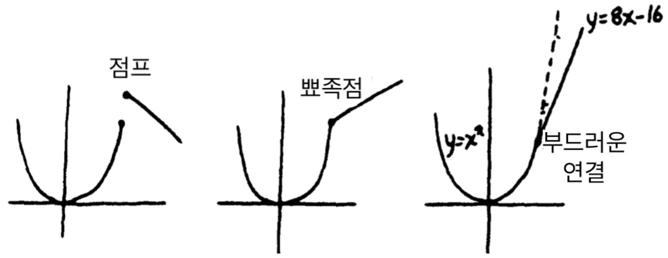
13. 속도 $= 2t - 9t^2$, 가속도 $= 2 - 18t$이다. $t = 2$에서 속도 $= -32$이고 가속도 $= -34$이다. 따라서 속력은 32(km/h)이고 시간당 34(km/h)만큼씩 커지고 있다.

14. $f'(x) = 2x + a$이다. 점 (3,4)에서 접선의 기울기가 2이므로 $f'(3) = 2$이고 $2\cdot 3 + a = 2$로부터 $a = -4$이다. f의 그래프가 점 (3,4)를 지나므로 $f(3) = 4$이고 $4 = 9 - 12 + b$로부터 $b = 7$이다.

15. $y' = -6x - 4$이고 $x = -\frac{2}{3}$에서 기울기가 0이다. $x = -\frac{2}{3}$이면 $y = \frac{10}{3}$이다. (아래 그림 참고)



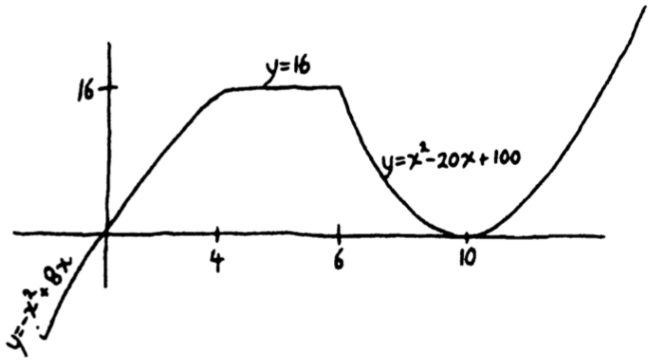
16. f의 그래프는 포물선으로 시작했다가 $x = 4$에서 직선으로 바뀐다. 연속이기 위해서는 $x = 4$에서 x^2의 높이와 $ax + b$의 높이가 일치할 필요가 있다. 그렇지 않으면 f의 그래프는 점프하게된다. (아래 맨 왼쪽 그림 참조) 그러므로 $16 = 4a + b$이어야 한다. 또한 $f'(x)$는 $x \le 4$일 때 $2x$이고 $x > 4$일 때는 a다. 부드럽게 이어지기 위해서는 $x = 4$에서 기울기 $2x$와 a가 일치할 필요가 있다. 그렇지 않으면 f는 뾰족점을 가지게 된다. (아래 가운데 그림 참조) 그러므로 $8 = a$이어야 한다. 그러면 $b = 16 - 32 = -16$이다. 그러면 f의 그래프는 연속이고 뾰족점이 없게 된다 (아래 맨 오른쪽 그림 참조)



17. $y' = x\cos x + \sin x$, $y'' = x(-\sin x) + \cos x + \cos x = -x\sin x + 2\cos x$. 그러면 $y'' + y = -x\sin x + 2\cos x + x\sin x = 2\cos x$.

18. $T' = 3t^2 - 15$, $T'' = 6t$. 만일 $t = 3$이면 $T = -18$, $T' = 12$, $T'' = 18$이므로 온도는 $-18°$이고 (춥다), 온도가 시간당 $12°$만큼씩 상승하는 중이며 (희망적임) 이 상승 비율 자체도 시간당 $18°/h$만큼씩 증가하는 중이다 (더 다행스럽다).

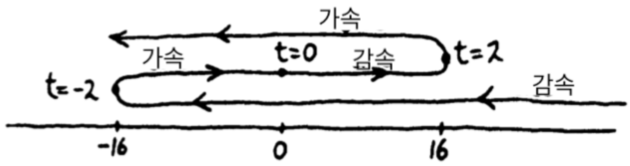
19. $y = -x^2 + 8x$의 그래프는 포물선이고 $y' = -2x + 8$이므로 $x = 4$에서 기울기가 0이다. $x = 4$이면 $y = 16$이므로 (4, 16)이 전환점이다. $y = 16$의 그래프는 수평선이다. 두 그래프는 $x = 4$에서 높이가 같으므로 연속적으로 이어진다. 또한 $x = 4$에서 두 그래프 모두 기울기가 0이므로 (뾰족점 없이) 부드럽게 이어진다. $y = x^2 - 20x + 100$의 그래프는 포물선이고 $y' = 2x - 20$이므로 $x = 10$에서 기울기가 0이다. $x = 10$이면 $y = 0$이므로 (10, 0)이 전환점이다. 직선과 이 포물선은 $x = 6$에서 모두 높이가 16으로 같으므로 점프없이 연결된다. 그러나 $x = 6$에서 포물선의 기울기는 -8이고 직선의 기울기는 0이므로 부드럽게 연결되지는 않는다. (아래 그림 참조)



20. $f(t) = 12t - t^3$이면 $f'(t) = 12 - 3t^2$, $f''(t) = -6t$이다. $t = \pm 2$이면 $f'(t) = 0$이고 $f'(t)$는 $(-\infty, -2)$에서는 음수, $(-2, 2)$에서는 양수, $(2, \infty)$에서는 음수다. $f''(t)$는 $t < 0$이면 양수, $t > 0$이면 음수다. 이를 바탕으로 정리하면 다음과 같다.

시간 구간	f'의 부호	f''의 부호	물체의 움직임
$(-\infty, -2)$	음	양	왼쪽으로 움직임, 감속
$(-2, 0)$	양	양	오른쪽으로 움직임, 가속
$(0, 2)$	양	음	오른쪽으로 움직임, 감속
$(2, \infty)$	음	음	왼쪽으로 움직임, 가속

핵심적인 값들은 $f(-\infty) = \infty$, $f(-2) = -16$, $f(0) = 0$, $f(2) = 16$, $f(\infty) = -\infty$이다. (아래 그림 참조)



3.6 합성함수의 미분

1. $6e^{6x}$
2. $2\cos 2x$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{1-(3-x)^2}} \cdot (-1)$
4. $-10\sin 5x$
5. $x^2 \cdot \cos 5x \cdot 5 + 2x\sin 5x = 5x^2\cos 5x + 2x\sin 5x$
6. $5x \cdot e^{2x} \cdot 2 + e^{2x} \cdot 5 = 10xe^{2x} + 5e^{2x}$
7. $e^x \cos e^x$
8. $x^3 \cdot 6(2x+5)^5 \cdot 2 + 3x^2(2x+5)^6 = 12x^3(2x+5)^5 + 3x^2(2x+5)^6$
9. $\dfrac{1}{5-x} \cdot (-1) = -\dfrac{1}{5-x}$

10. $\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$

11. $2e^{5+2x}$

12. $\frac{1}{2}(3+x^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$

13. $D4\sec 5x = 4\sec 5x \tan 5x \cdot 5 = 20\sec 5x \tan 5x$

14. $D(\cos x)^3 = 3\cos^2 x \cdot D\cos x = -3\cos^2 x \sin x$

15. $\cos\frac{1}{x} \cdot D_x \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

16. $e^{\sqrt{x}} D_x \sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

17. $3(x^2+4)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+4)^2$

18. $\cos x^4 \cdot 4x^3 = 4x^3 \cos x^4$

19. $D_x(\cos x)^4 = 4(\cos x)^3 \cdot D\cos x = -4\sin x \cos^3 x$

20. $D(x^2+4x)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2+4)^{-3/2} \cdot (2x+4)$

21. $\ln x^3 = 3\ln x$. 그러므로 미분은 $3/x$ (다른 방법으로, $(1/x^3) \cdot 3x^2 = 3/x$)

22. $D(\ln x)^{-1} = -(\ln x)^{-2} D\ln x = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$

23. $-\sin(3-x) \cdot (-1) = \sin(3-x)$

24. $-e^x \csc^2 e^x$

25. $x \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2 + \ln(2x+1) = \frac{2x}{2x+1} + \ln(2x+1)$

26. $6(3x+4)^5 \cdot 3 = 18(3x+4)^5$

27. $D(\sec 3x^4)^3 = 3(\sec 3x^4)^2 D\sec 3x^4 = 3\sec^2 3x^4 \sec 3x^4 \tan 3x^4 \cdot 12x^3$

28. $(1/\sin e^x) \cdot D\sin e^x = \frac{e^x \cos e^x}{\sin e^x} = e^x \cot e^x$

29. $\frac{e^x}{x} + e^x \ln x$

30. $D(e^x+1)^{-1} = -(e^x+1)^{-2} e^x = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

31. $-4\csc 4x \cot 4x$

32. $(4/\ln x) \cdot D\ln x = \frac{4}{x\ln x}$

33. $2x\ln 3$ ($\ln 3$은 상수)

34. $\ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & , x<0 \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$ 이므로 $D\ln|x| = \begin{cases} (1/-x)\cdot(-1), & x<0 \\ 1/x, & x>0 \end{cases} = \frac{1}{x}$

35. 연쇄 법칙에 의해 $D_t v^2(t) = 2v(t)v'(t)$이다. 그러면 곱 법칙에 의해 $D_t \frac{1}{2}m(t)v^2(t) = \frac{1}{2}m(t) \cdot 2v(t)v'(t) + v^2(t) \cdot \frac{1}{2}m'(t)$이다. $m = 5, v = 3, m' = 2, v' = -1$로 두면 이 시각에서 (운동 에너지)$' = -6$을 얻는다. 즉 운동 에너지는 이 순간 초당 6 에너지 단위만큼씩 줄어들고 있다.

36. $\underbrace{\frac{1}{\ln\ln\cdots\ln 2x}}_{638\log} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln\ln\cdots\ln 2x}}_{637\log} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln\ln\cdots\ln 2x}}_{636\log} \cdots \frac{1}{\ln\ln 2x} \cdot \frac{1}{\ln 2x} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2$

37. (a) $-\csc^2 f(x) \cdot f'(x)$

    (b) $xf'(x) + f(x)$

    (c) $3(f(x))^2 f'(x)$

    (d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

    (e) $e^{f(x)} f'(x)$

38. $D_x \mathrm{sky}(3x) = e^{3x}((3x)^3 + 3) \cdot 3$

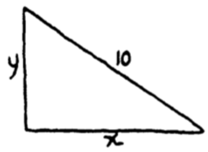
39.

$$\begin{aligned} w' &= 3e^{\sec 2\theta} \cdot \sec 2\theta \tan 2\theta \cdot 2 = 6e^{\sec 2\theta} \sec 2\theta \tan 2\theta \\ w'' &= 6e^{\sec 2\theta} \sec 2\theta \sec^2 2\theta \cdot 2 + 6e^{\sec 2\theta} \sec 2\theta \tan 2\theta \cdot 2 \tan 2\theta + 6e^{\sec 2\theta} \cdot \sec 2\theta \tan 2\theta \cdot 2 \cdot \sec 2\theta \tan 2\theta \\ &= 12 \sec 2\theta e^{\sec 2\theta} (\sec^2 2\theta + \tan^2 2\theta + \sec 2\theta \tan^2 2\theta) \end{aligned}$$

40. $y' = 4(2-x)^3 \cdot (-1)$이므로 $x = 3$이면 $y' = 4$이다. 접선의 기울기는 4이고 접선의 방정식은 $y - 1 = 4(x-2)$이다. 법선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이고 법선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{1}{4}(x-3)$이다.

41. 1계도 함수는 $-(2+3x)^{-2} \cdot 3$, 2계도함수는 $2(2+3x)^{-3} \cdot 3 \cdot 3$, 3계도함수는 $-3 \cdot 2(2+3x)^{-4} \cdot 3^3$, $\ldots$, 99계도함수는 $\dfrac{-99! \times 3^{99}}{(2+3x)^{100}}$, 100계도함수는 $\dfrac{100! \times 3^{100}}{(2+3x)^{101}}$

42. 아래 그림으로부터 $y = \sqrt{100 - x^2}$이다. 그러면 $y' = \frac{1}{2}(100 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = -x/\sqrt{100 - x^2}$이다. $x = 1$이면 $y' = -1/\sqrt{99}$이고 $x = 9$이면 $y' = -9/\sqrt{19}$이다. 사다리가 미끄러지기 시작할 때, x는 1정도 작은 값이고 y는 $1/\sqrt{99}$m/sec 정도로 느리게 감소한다. 사다리가 거의 눕혀져 평행이 되면 $x = 9$가 되고 y는 $9/\sqrt{19}$m/sec 정도로 더 빠르게 감소한다.



3.7 음함수 미분법과 로그 미분법

1. (a) $y' = x \cos y \cdot y' + \sin y$, 그러므로 $y' = \sin y / (1 - x \cos y)$

   (b) $1 + y' = y \sec^2 y \cdot y' + \tan y \cdot y' + x \sec^2 x + \tan x$ 그러므로

$$y' = \frac{x \sec^2 x + \tan x - 1}{1 - y \sec^2 y - \tan y}$$

2.

$$
\begin{aligned}
y' &= -\sin(x^2+y^2)\cdot(2x+2yy') \\
y'(1+2y\sin(x^2+y^2)) &= -2x\sin(x^2+y^2) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-2x\sin(x^2+y^2)}{1+2y\sin(x^2+y^2)} \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{dy/dx} = \frac{1+2y\sin(x^2+y^2)}{-2x\sin(x^2+y^2)}
\end{aligned}
$$

3. (a)
   - 먼저, 양함수로 표현하면 $y = -\sqrt{1-x^2}$이다. (여기서 마이너스 부호를 선택한 이유는 점 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$이 아래쪽 반원 위에 있고 여기서 y값은 음수이기 때문) 그러면 $y' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x) = x/\sqrt{1-x^2}$이다. $x = \frac{1}{2}$이면 $y' = 1/\sqrt{3}$이고, 접선의 방정식은 $y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = (1/\sqrt{3})(x - \frac{1}{2})$, 즉 $\sqrt{3}y - x = -2$이다.
   - 음함수 미분을 이용하면, $2x + 2yy' = 0$, $y' = -x/y$이다. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$이면, $y' = 1/\sqrt{3}$이고, 나머지 과정은 위와 같다.

   (b)
   - 먼저, 양함수로 표현하면 $\sqrt{y} = 3 - \sqrt{x}$, $y = (3-\sqrt{x})^2$이고 따라서 $y' = 2(3-\sqrt{x})\cdot(-1/2\sqrt{x})$이다. $x = 1$이면 $y' = -2$이고 접선의 방정식은 $y - 4 = -2(x-1)$, 즉 $2x + y = 6$이다.
   - 음함수 미분을 이용하면, $1/2\sqrt{x} + y'/2\sqrt{y} = 0$, $y' = -\sqrt{y}/\sqrt{x}$이다. $x = 1, y = 4$이면 $y' = -2$이고 나머지 과정은 위와 같다.

4. $\frac{1}{y}y' = -(xy'+y)$, $y' = \frac{-y^2}{1+xy}$. $x = 0$일 때 y'값을 구하려면 $x = 0$일 때 y값이 필요하다. $x = 0$이면 $\ln y = 1$, 즉 $y = e$. 그러므로 $y' = f'(0) = -e^2$.

5. 타원에 대해 $8x + 18yy' = 0$, 즉 $y' = -4x/9y$이고, 쌍곡선에 대해서는 $2x - 2yy' = 0$, 즉 $y' = x/y$이다. 따라서 기울기들의 곱은 $-4x^2/9y^2$이다. $4x^2 + 9y^2 = 72$와 $x^2 - y^2 = 5$를 연립하여 풀면 교차점은 $(-3,2), (-3,-2), (3,2), (3,-2)$이다. 이 x, y 값들에 대해 기울기의 곱은 -1이므로 두 곡선은 직교한다.

6. $e^{xy}\cdot(xy'+y) = y'$이므로 $y' = \frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$이고 $e^{xy} = y$이므로 $y' = \frac{y^2}{1-xy}$이다. 따라서 $(1-xy)y' = (1-xy)\frac{y^2}{1-xy} = y^2$이다.

7. (a)

$$
\begin{aligned}
y &= x^3\sin x\cdot(x^2+4)^{-1} \\
y' &= x^3\sin x\cdot(-(x^2+4)^{-2})\cdot 2x + x^3\cos\cdot(x^2+4)^{-1} + 3x^2\sin x\cdot(x^2+4)^{-1} \\
&= \frac{-2x^4\sin x}{(x^2+4)^2} + \frac{x^3\cos x}{x^2+4} + \frac{3x^2\sin x}{x^2+4}
\end{aligned}
$$

(b)

$$\begin{aligned}\ln y &= 3\ln x + \ln\sin x - \ln(x^2+4),\\ \frac{1}{y}y' &= \frac{3}{x} + \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x - \frac{2x}{x^2+4},\\ y' &= y\left(\frac{3}{x} + \cot x - \frac{2x}{x^2+4}\right)\end{aligned}$$

y에 $x^3\sin x(x^2+4)^{-1}$을 대입하면 (a)의 답과 같아진다.

8. (a) $y=2^x$이면 $\ln y = x\ln 2$, 미분하면 $(1/y)y' = \ln 2$, 즉 $y' = y\ln 2 = 2^x \ln 2$
   (b) $y = x^x$이면 $\ln y = x\ln x$, 미분하면 $y'/y = x(1/x) + \ln x$, 즉 $y' = y + y\ln x = x^x + x^x\ln x$
   (c) $y = x^{\sin x}$이면 $\ln y = \sin x\ln x$, 미분하면 $(1/y)y' = (\sin x)(1/x) + \cos x\ln x$, 즉 $y' = y\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\ln x\right) = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\ln x\right)$
   (d) $3x^2$
   (e) $4(2x+3)^3\cdot 2 = 8(2x+3)^3$
   (f) $y = 4^{2x+3}$이면 $\ln y = (2x+3)\ln 4$, 미분하면 $(1/y)y' = 2\ln 4$, 즉 $y' = 2y\ln 4 = 2\cdot 4^{2x+3}\ln 4$
   (g) e^x
   (h) $y = (2x+3)^{4x}$이면 $\ln y = 4x\ln(2x+3)$, 미분하면 $(1/y)y' = 4x\cdot\dfrac{1}{2x+3}\cdot 2 + 4\ln(2x+3)$, 즉 $y' = (2x+3)^{4x}\left(\frac{8x}{2x+3} + 4\ln(2x+3)\right)$

3.8 역미분

1. (a) $-3\cos x + C$
   (b) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$
   (c) $u^5/5 + C$
   (d) $\pi\sec(x/\pi) + C$
   (e) $t^{-2}/(-2) + C = -1/2t^2 + C$
   (f) $\ln|x| + C$
   (g) $x^{-4}/(-4) + C = -1/4x^4 + C$
   (h) $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
   (i) $x^{1/2}/\frac{1}{2} + C = 2\sqrt{x} + C$
   (j) $x^9/9 + C$
   (k) $\frac{1}{2}x^{-1}/(-1) + C = -\dfrac{1}{2x} + C$
   (l) $4x^{-1}/(-1) + C = -\dfrac{4}{x} + C$
2. $f(x) = -\cos x + \frac{1}{3}x^3 + C$. $f(0) = 10$으로부터 $10 = -1 + C$, 즉 $C = 11$. 따라서 $f(x) = -\cos x + \frac{1}{3}x^3 + 11$.

3. $f''(x) = 5x + A,\ f'(x) = \dfrac{5x^2}{2} + Ax + B,\ f(x) = \frac{5}{6}x^3 + \frac{A}{2}x^2 + Bx + C$

4. s가 시간 t일 때 위치라면, $s'(t) = 7 - t^2$이고 $s(t) = 7t - \frac{1}{3}t^3 + C$. $s(3) = 4$로 두면 $4 = 21 - 9 + C$, 즉 $C = -8$이다. 그러므로 $s(t) = 7t - \frac{1}{3}t^3 - 8$. 따라서 $t = 6$이면 $s = -38$.

5. $y = x^2 + 3x + C,\ -2 = 1 + 3 + C,\ C = -6,\ y = x^2 + 3x - 6$

6. 그렇지 않다. $D \ln \sin x = (1/\sin x) \cdot D \sin x = (1/\sin x) \cos x$이기 때문이다.

7. (a) 그렇지 않다. $D \sin^2 x = 2 \sin x \cos x$이기 때문이다.
   (b) 그렇지 않다. $D \sin 2x = \cos 2x \cdot 2$이기 때문이다 (올바른 역미분은 $\frac{1}{2} \sin 2x + C$이다)
   (c) 그렇다.
   (d) 그렇지 않다. $D \sin x^2 = \cos x^2 \cdot 2x$이기 때문이다.

8. y를 시간 t일 때 높이라고 하자. 그러면 $y'' = -32, y' = -32t + C$이다. $t = 0$일 때 $y' = 40$이므로 $40 = 0 + C$로부터 $C = 40$이다. 그러면 $y = -16t^2 + 40t + K$이다. $t = 0$일 때 $y = 24$이므로 $24 = K$이고 $y = -16t^2 + 40t + 24$이다. 돌은 속도가 0일 때 (속도가 양수에서 음수로 변할 때) 꼭대기에 도달한다. 그러므로 $-32t + 40 = 0$으로부터 $t = \frac{5}{4}$이고 이 때 $y = 49$이다. 돌은 $y = 0$이 될 때 지면에 닿는다. 따라서 $-16t^2 + 40t + 24 = 0, 2t^2 - 5t - 3 = 0$으로부터 $t = -\frac{1}{2}$ 또는 $t = 3$을 얻고 $t > 0$이어야 하므로 $t = 3$초 후에 땅에 떨어진다.

9. $-3 \ln |3 - x|$

10. 구할 수 없다.

11. $5 \ln |x|$

12. $\ln |2 + x|$

13. 구할 수 없다.

14. $(7/\pi) \sin \pi x$

15. 구할 수 없다.

16. $\frac{1}{5}(\frac{1}{3}x^3 + 3x^2)$

17. 구할 수 없다.

18. $\dfrac{5(3x+6)^{-1}}{-1} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{-5}{3(3x+6)}$

19. $4\dfrac{(2 + \frac{1}{4}x)^{3/2}}{3/2} = \dfrac{8}{3}(2 + \frac{1}{4}x)^{3/2}$

20. 구할 수 없다.

21. $\frac{3}{2\pi} \sin \dfrac{2\pi x}{3}$

22. $x^7/42$

23. $-3e^{-x}$

24. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$

25. πx

26. $\frac{1}{3}(3x+4)^5/5$

27. $x^4/8$

28. $\frac{1}{2}(x^{-2}/(-2)) = -\dfrac{1}{4x^2}$

29. $\frac{1}{5}(x^{-2}/(-2)) + C = -\dfrac{1}{10x^2} + C$

30. $t^{1/2}/\frac{1}{2} + C = 2\sqrt{t} + C$

31. $\frac{3}{4}x^4 + C$

32. 구할 수 없다.

33. $2x - x^3 + C$

34. $-\frac{1}{3} \cdot (2-3x)^{-2}/(-2) + C = \dfrac{1}{6(2-3x)^2} + C$

35. $x + C$

36. $-\frac{1}{3}\cos 3u + C$

37. 구할 수 없다.

38. $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

39. 구할 수 없다.

40. $-1/x^3 + C$

41. $2 \cdot \frac{1}{4}\ln|3+4x| + C = \frac{1}{2}\ln|3+4x| + C$

42. 구할 수 없다.

43. $-(3-x)^{3/2}/\frac{3}{2} + C = -\frac{2}{3}(3-x)^{3/2} + C$

44. $\frac{1}{2}[(5x^4/4) + 3x] + C = \frac{5}{8}x^4 + \frac{3}{2}x + C$