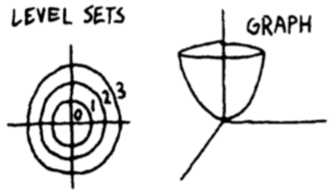
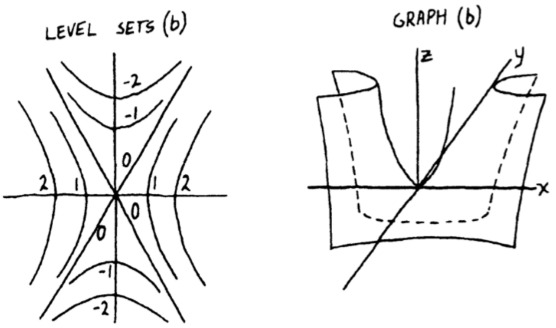
11장 편미분
연습문제 해답

11.1 그래프와 등위집합

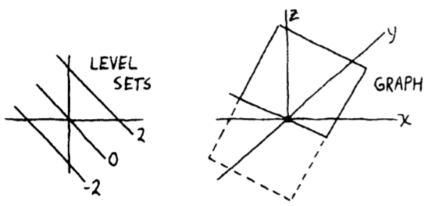
1. (a) 그래프는 원형 포물면 (circular paraboloid) $z = x^2 + y^2$. 음수 등위집합은 없고 0-등위 집합은 $x^2 + y^2 = 0$, 즉 원점이고 양수 등위집합은 원이다.



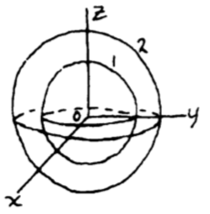
   (b) 그래프는 쌍곡 포물면 (hyperbolic paraboloid) $z = x^2 - y^2$. 5-등위 집합은 $x^2 - y^2 = 5$ 인 쌍곡선, -5-등위 집합은 $x^2 - y^2 = -5$ 인 쌍곡선, 0-등위 집합은 $x^2 - y^2 = 0$은 한 쌍의 직선인 $y = \pm x$ (이 직선들은 쌍곡선의 점근선)



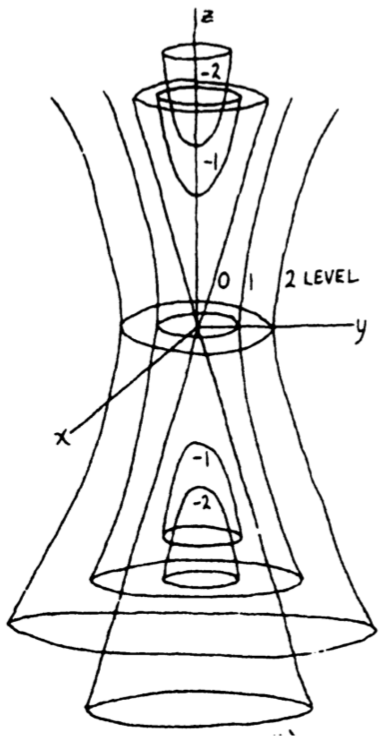
   (c) 그래프는 평면 $z = x + y$. 등위 집합들은 $x + y = C$ 형태의 직선



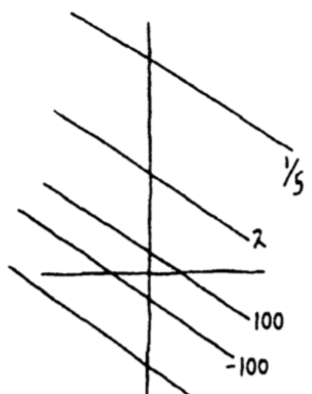
2. (a) 그래프는 구



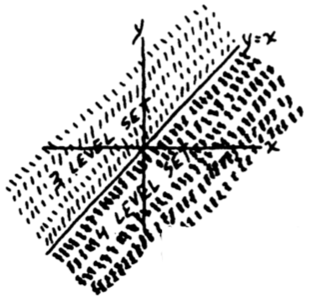
(b) $x^2+y^2-z^2=2$는 일엽쌍곡면. $x^2+y^2-z^2=-2$은 이엽쌍곡면. $x^2+y^2-z^2=0$은 원뿔 등이다. 원뿔은 모든 쌍곡면들의 점근면이고 이엽쌍곡면은 이 원뿔의 안쪽에, 일엽쌍곡면은 이 원뿔의 바깥쪽에 있게 된다.



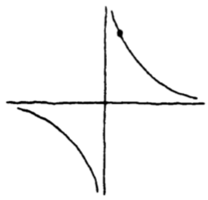
(c) $1/(x+y)=100$은 직선 $x+y=\frac{1}{100}$, $1/(x+y)=-\frac{1}{7}$은 직선 $x+y=-7$. $1/(x+y)=0$은 될 수 없다.



(d) 직선 $y = x$ 위의 점들 및 이 직선보다 위쪽의 점들은 3-등위집합이고 나머지는 모두 4-등위집합. 이외 다른 등위집합은 공집합이다.



3. $f(2,6) = 12$ 이므로 이 점은 f 값이 12 이다. 그러므로 12-등위집합 위의 점이다. 12-등위집합은 쌍곡선 $xy = 12$ 이다. (아래 그림 참조)



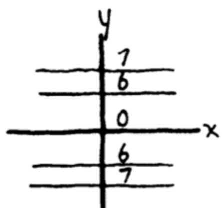
4. (a) $f(x) = \frac{1}{3}(6 - 2x)$ 의 그래프, $g(x,y) = 2x + 3y$ 의 6-등위 집합, $h(x,y) = 2x + 3y - 6$ 의 0-등위 집합 등등

   (b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ 의 그래프, $h(x,y,z) = z - x^2 - 2y^2$ 의 0-등위 집합, $k(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z$ 의 0- 등위 집합 등등

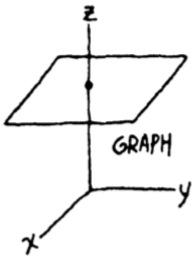
   (c) z 에 대해 하나의 해가 존재하지 않으므로 어떤 함수의 그래프는 아니다. $f(x,y,z) = z^2 + 2y^2 - x$ 의 0-등위 집합

   (d) 방정식은 $x^2 + y^2 = 4$. (풀고자 하는 z 자체가 없으므로) 함수의 그래프는 아니다. $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ 의 4-등위 집합

5. (아래 그림 참조) 6-등위 집합은 x-축으로부터 6 만큼 떨어진 한 쌍의 직선, 0-등위 집합은 x-축 자체. 거리가 음수일 수 없으므로 음의 등위 집합은 없음

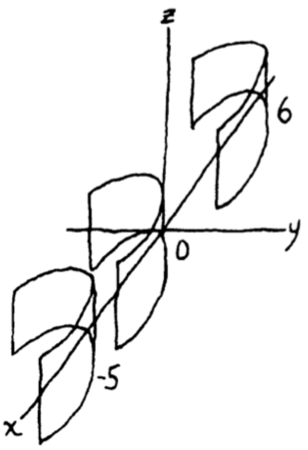


6. 그래프는 평면 $z = 6$ (아래 그림 참조). 6-등위 집합은 xy-평면 전체이고 다른 등위 집합은 공집합

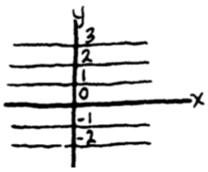


7. (아래 그림들 참조)

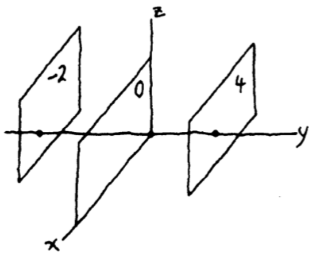
   (a) f는 삼변수의 함수로 주어져 있다 (y^2-x에 z가 포함되어 있지 않더라도). 6-등위 집합은 곡면 $y^2-x=6$이고 포물기둥이다.



   (b) 등위 집합은 2차원에서 직선 $y=C$이다.



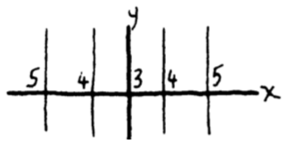
   (c) 등위 집합은 3차원에서 평면 $y=C$이다.



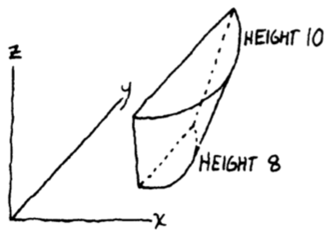
8. 6-등위 집합은 $\dfrac{2}{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}}=6$ 즉 $\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}=\frac{1}{3}$, $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{1}{9}$ (구) 이다. 0 또는 음의 등위 집합은 없다. 일반적으로 $C>0$이면 C-등위 집합은 중심이 $(-2,1,3)$이고 반지름이 $2/C$인 구다.

9. (a) 세 점 A, B, C 중에 A 점 위에서의 곡면의 높이가 가장 높다. 즉 A에 대한 z의 값이 가장 크다. 그러므로 $f(3,2)$가 가장 크다.

   (b) (아래 그림 참조) $z = 3$에서의 단면은 단일 직선이다. $z = 4$에서의 단면은 한 쌍의 직선이다. $z < 3$에 대해서는 단면이 없다.



10. (아래 그림 참조)



11. 아니오. 만일 Q가 두 개의 등위 집합에 속하게 된다면 Q는 두 개 이상의 f 값을 갖는 것이고 함수는 동일한 입력에 대해 두 개 이상의 값을 할당할 수 없기 때문이다.

11.2 편미분

1. (a) $\partial z/\partial x = 2x + 6x^2y^2$, $\partial z/\partial y = 4x^3y$

   (b) $\partial z/\partial x = e^{-y}$, $\partial z/\partial y = -xe^{-y}$

   (c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x+y-x}{(x+y)^2} = \dfrac{y}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -x(x+y)^{-2} = \dfrac{-x}{(x+y)^2}$

   (d) $\partial z/\partial x = x \cdot 4(2x+5y)^3 \cdot 2 + (2x+5y)^4 = 8x(2x+5y)^3 + (2x+5y)^4$, $\partial z/\partial y = 4x(2x+5y)^3 \cdot 5 = 20x(2x+5y)^3$

   (e) $\partial z/\partial x = -3yx^{-2} = -3y/x^2$, $\partial z/\partial y = 3/x$

2. (a)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -3(2x+3y)^{-2} \cdot 3 = -\frac{9}{(2x+3y)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3(2x+3y)^{-2} \cdot 2 = -\frac{6}{(2x+3y)^2}$$

   (b)

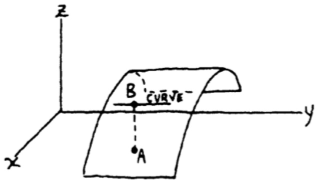
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{x^2+y^2-x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(c)

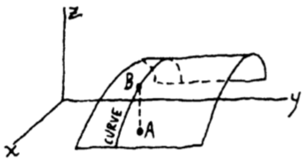
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x-y-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2x\cdot -2(x-y)^{-3}\cdot -1 = \frac{4x}{(x-y)^3},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{(x-y)^2\cdot 2 - 2x\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-2x-2y}{(x-y)^3}\end{aligned}$$

3. (a) g_{cba} (c에 대해서 먼저 미분하고 다음으로 b 그리고 a에 대해서 미분)
   (b) u_{txx} (t에 대해서 먼저 미분하고 다음으로 x 그리고 다시 x에 대해서 미분)
4. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = z\cos\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y} = \dfrac{z}{y}\cos\dfrac{x}{y}$
   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = z\cos\dfrac{x}{y}\cdot -xy^{-2} = \dfrac{-xz}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}$
   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \sin\dfrac{x}{y}$
   (d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}$
5. (a) $\partial/\partial y = -e^x\sin y$, $\partial^2/\partial y^2 = -e^x\cos y$, $\partial^3/\partial y^3 = e^x\sin y$
   (b) x에 대해 연달아 미분해도 계속 $e^x\cos y$
   (c) $\partial/\partial x = \sin y, \partial^2/\partial x^2 = 0, \partial^3/\partial x^3 = 0$
   (d) $\partial/\partial y = x\cos y, \partial^2/\partial y^2 = -x\sin y, \partial^3/\partial y^3 = -x\cos y$
   (e) $\partial(-x\sin y)/\partial x = -\sin y$
6. (a) $\partial x/\partial\rho = \sin\phi\cos\theta$, $\partial^2 x/\partial\rho^2 = 0$
   (b) $\partial x/\partial\theta = -\rho\sin\phi\sin\theta$, $\partial^2 x/\partial\phi\partial\theta = -\rho\cos\phi\sin\theta$
7. 카메라 가격이 오르면 일반적으로 판매량이 줄어들 것이기 때문에 $\partial f/\partial x$는 아마도 음수일 것이다. 필름 가격이 오르면 역시 카메라 판매량이 줄어들 것이기 때문에 $\partial f/\partial y$도 아마 음수일 것이다.
8. 항공사 A의 가격이 오르면 항공사 A의 승객수가 줄어들 것이기 때문에 $\partial f/\partial a$는 음수이다. 경쟁사의 가격이 오르면 자신의 승객수는 늘어갈 것이기 때무네 $\partial f/\partial b$는 양수다.
9. 직원들이 1km를 달리고 2km를 자전거를 타는 직원들을 생각해보자. 두 편미분이 모두 양수이므로 달리는 걸리는 늘리거나 또는 자전거 타는 길이를 늘리는 것 모두 회사의 수익을 증대시킨다. 또한 달리는 거리를 늘리는 것이 자전거 거리를 늘리는 것보다 수익을 더 많이 향상시킨다.
10. ∂온도$/\partial x = 8(2x-3y)^3$, ∂온도$/\partial y = -12(2x-3y)^3$. 만일 $x=4, y=3$이면 각각의 편미분은 -8과 12이다. 동쪽으로 향하는 물체는 단위 거리당 $8°$의 온도 하강을 느끼고 북쪽으로 향하는 물체는 단위 거리당 $12°$의 온도 상승을 느낀다. 남쪽으로 향하는 물체는 단위 거리당 $12°$의 온도 하강을 느낀다.
11. A를 지나 동쪽으로 향하는 물체는 온도 상승을 느끼므로 $\partial f/\partial x$는 양수다. A를 지나 북쪽으로 향하는 물체는 순간적으로 아무런 온도 변화를 느끼지 않으므로 점 A에서 $\partial f/\partial y = 0$이다.

12. (아래 그림들 참조) 그래프 위에서 점 B를 지나 x는 고정되고 y가 증가하는 방향으로 움직이는 물체는 위로 올라가거나 내려가지 않기 때문에 $\partial f/\partial y = 0$, 즉 B를 지나는 표시된 곡선의 기울기는 0이다.



그래프 위에서 점 B를 지나 y는 고정되고 x가 증가하는 방향으로 (즉 앞쪽으로) 움직이는 물체는 아래로 내려 가기 때문에 $\partial f/\partial x$는 음수, 즉 B를 지나는 표시된 곡선의 기울기는 음수다.

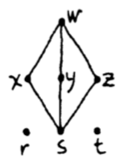


13. 점 P가 yz-평면의 뒤쪽에 놓여 있음에 유의한다. 점 P를 지나 y와 z는 고정하고 x가 증가하는 방향으로 움직이는 (즉 yz 평면 뒤에 있지만 앞쪽으로 움직이는) 물체는 바깥쪽 원기둥에서 안쪽 원기둥으로, 즉 더 낮은 등위 집합으로부터 더 높은 집합으로 움직인다. 따라서 $\partial f/\partial x > 0$이다. 점 P를 지나 x와 z는 고정하고 y가 증가하는 방향으로 움직이는 물체는 오른쪽으로 움직이고, 안쪽 원기둥에서 바깥쪽 원기둥으로, 즉 더 높은 등위 집합으로부터 더 낮은 집합으로 움직인다. 따라서 $\partial f/\partial y < 0$이다. 점 P를 지나 z가 증가하는 방향으로 움직이는 물체는 원기둥을 따라 위로 올라가고 등위 집합의 변화가 없으므로 $\partial f/\partial z = 0$이다.

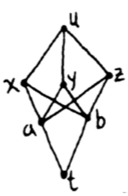
14. 동쪽으로 조금 움직이면 g가 f보다 더 많이 변하기 때문에 $\partial g/\partial x$가 더 크다.

11.3 1계편미분의 연쇄법칙

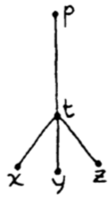
1. $\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial s}$



2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{da}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{da}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{da}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{db}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{db}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{db}{dt}$



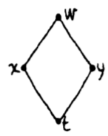
3. $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{dp}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial y}$



4. (a) (직접 계산) $w = \sin(t^3 \ln t)$ 이므로 $dw/dt = \cos(t^3 \ln t) \cdot (t^3 \cdot 1/t + 3t^2 \ln t) = t^2 \cos(t^3 \ln t) + 3t^2 \ln t \cos(t^3 \ln t)$

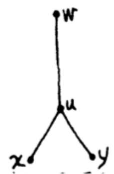
(연쇄 법칙 이용)

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= y \cos xy \cdot 1/t + x \cos xy \cdot 3t^2 \\ &= t^2 \cos(t^3 \ln t) + 3t^2 \ln t \cos(t^3 \ln t) \end{aligned}$$

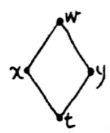


(b) (직접 계산) $w = \dfrac{1}{x \sin y}$ 이므로 $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{1}{\sin y} \cdot (-x^2) = -\dfrac{1}{x^2 \sin y}$

(연쇄 법칙 이용) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{dw}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{u^2} \sin y = -\dfrac{1}{x^2 \sin y}$

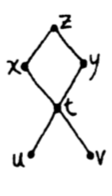


5. (a) $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

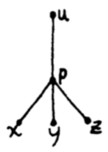


(b) 시각이 3일 때 움직이는 물체는 초당 2° 만큼씩 온도가 떨어지는 것을 느낀다.

6. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial u} = \cos t \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial t}{\partial u} + 6t^2 \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial t}{\partial u}$

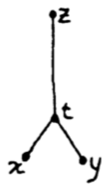


7. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{du}{d\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\dfrac{du}{d\rho} = \dfrac{x}{\rho}\dfrac{du}{d\rho}$. 이와 비슷하게 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{\rho}\dfrac{du}{d\rho}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{z}{\rho}\dfrac{du}{d\rho}$. 그러면 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2} + \dfrac{z^2}{\rho^2}\right)\left(\dfrac{du}{d\rho}\right)^2 = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{\rho^2}\left(\dfrac{du}{d\rho}\right)^2 = \left(\dfrac{du}{d\rho}\right)^2$



8. $u = u(p,q)$ 이고 여기서 $p = (y-x)/xy$, $q = (z-x)/xz$ 이다. 그러면 $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{xy(-1)-(y-x)y}{(xy)^2} + \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{xz(-1)-(z-x)z}{(xz)^2} = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial p} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial q}$ 이다. 이와 비슷하게 $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{xy-(y-x)x}{x^2y^2} = \dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial u}{\partial p}$, $u_z = \dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial u}{\partial q}$ 이다. 그러면 $x^2u_x + y^2u_y + z^2u_z = 0$ 이다.

9. 세 함수는 특별한 방식으로 x 와 y 의 함수다. 즉 x^2+y^2 의 함수다. 일반적으로 $t = x^2+y^2$ 일 때, $z = z(t)$ 라고 하자. 그러면 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{dz}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial x} = 2x\dfrac{dz}{dt}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y\dfrac{dz}{dt}$ 이고 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 와 $x\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 는 (모두 $2xy\dfrac{dz}{dt}$ 로) 일치한다.

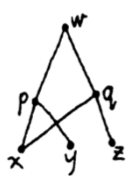


10. 곱법칙에 의해 $u_x = x^2\partial w/\partial x + 2xw$ 이고 여기서 $w = w(p,q), p = y/x, q = z/x$ 이므로

$$\begin{aligned}
u_x &= x^2\left(\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}\right) + 2xw \\
&= x^2\left(\frac{\partial w}{\partial p}\cdot -\frac{y}{x^2} + \frac{\partial w}{\partial q}\cdot -\frac{z}{x^2}\right) + 2xw \\
&= -y\frac{\partial w}{\partial p} - z\frac{\partial w}{\partial q} + 2xw \\
u_y &= x^2\frac{\partial w}{\partial y} = x^2\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} = x^2\frac{\partial w}{\partial p}\cdot\frac{1}{x} = x\frac{\partial w}{\partial p}, \\
u_z &= x\frac{\partial w}{\partial q}
\end{aligned}$$

그러면

$$xu_x + yu_y + zu_z = -xy\frac{\partial w}{\partial p} - xz\frac{\partial w}{\partial q} + 2x^2w + xy\frac{\partial w}{\partial p} + xz\frac{\partial w}{\partial q} = 2x^2w = 2u$$



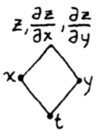
11.4 2계편미분의 연쇄법칙

1. (아래 그림 참조)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial u} &= \frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial u} = 3\frac{\partial p}{\partial a} + 5\frac{\partial p}{\partial b}, \\
\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} &= 3\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right) + 5\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial b}\right) \\
&= 3\left(\frac{\partial^2 p}{\partial a^2}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial^2 p}{\partial b\,\partial a}\frac{\partial b}{\partial u}\right) + 5\left(\frac{\partial^2 p}{\partial a\,\partial b}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial^2 p}{\partial b^2}\frac{\partial b}{\partial u}\right) \\
&= 9\frac{\partial^2 p}{\partial a^2} + 30\frac{\partial^2 p}{\partial a\,\partial b} + 25\frac{\partial^2 p}{\partial b^2}
\end{aligned}$$

2. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = 3\dfrac{\partial z}{\partial x} + 4\dfrac{\partial z}{\partial y}$. $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y, dx/dt, dy/dt$ 가 모두 t의 함수이므로 t로 다시 미분하기 위해서는 곱의 법칙을 사용한다.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z}{dt^2} &= 3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 4\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
&= 3\left(3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 4\left(3\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \\
&= 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 16\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 24\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}
\end{aligned}$$



3. $\dfrac{\partial u}{\partial a} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial a} = 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2ab\dfrac{\partial u}{\partial y}$. $2ab\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 를 b에 대해 미분하기 위해 곱 법칙을 이용한다.

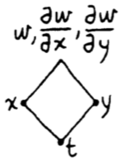
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial b\,\partial a} &= 2\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2ab\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2a\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial y}{\partial b}\right) + 2ab\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial b}\right) + 2a\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a^3 b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(2a^2 + 6ab) + 2a\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}$$

4. $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{x}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = 3t^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial w}{\partial y}$. 우변의 모든 항이 모두 t의 함수이므로 t에 대해 다시 미분하기 위해서는 곱법칙을 사용한다.

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dt^2} &= 3t^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 6t\frac{\partial w}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ &= 3t^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x}\frac{dy}{dt}\right) + 6t\frac{\partial w}{\partial x} + 2t\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right) + 2\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}$$

$dx/dt = 3t^2$, $dy/dt = 2t$를 이용하면 답은

$$9t^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4t^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 12t^3\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + 6t\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial w}{\partial y}$$



5. (a) $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{r}$

$\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{r^2}$

(b) $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{r - x(\partial r/\partial x)}{r^2} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{x^2}{r^3} = \dfrac{y^2}{r^3}$

$\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -y\left(-\dfrac{2}{r^3}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{2xy}{r^4}$

(c) $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$. 곱 법칙과 연쇄 법칙을 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta\,\partial r}\right]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2\end{aligned}$$

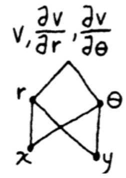
그러면

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2\frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial \theta} + \frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{xy}{r^4}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad (1)$$

(주의) 이와 비슷하게

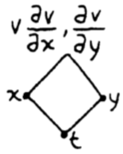
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{xy}{r^3}\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial \theta} + \frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial v}{\partial r} - 2\frac{xy}{r^4}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad (2)$$

그러면 식 (1)와 식 (2)로부터 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ (직교좌표계에서 라플라시안)은 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$ (극좌표계에서의 라플라시안)과 같다.



6. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$. 곱 법칙을 이용하면

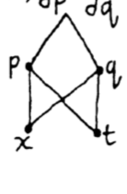
$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{dt^2} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$



7. .

$$\begin{aligned}
w_x &= \frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial q}, \\
w_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right) \\
&= \frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial q\,\partial p}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\frac{\partial q}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}, \\
w_t &= \frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} = -c\frac{\partial w}{\partial p} + c\frac{\partial w}{\partial q}, \\
w_{tt} &= -c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right) + c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right) \\
&= -c\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial q\,\partial p}\frac{\partial q}{\partial t}\right) + c\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\frac{\partial q}{\partial t}\right) \\
&= c^2\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} - 2c^2\frac{\partial^2 w}{\partial p\,\partial q} + c^2\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}
\end{aligned}$$

그러면 $c^2 w_{xx} - w_{tt}$ 는 서로 상쇄되어 $4c^2 w_{pq}$ 가 된다.



11.5 최대와 최소

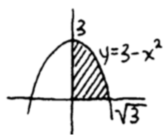
1. (a) (임계점) $\partial f/\partial x = 3y - 4x$, $\partial f/\partial y = 3x + 2$. $3y - 4x = 0, 3x + 2 = 0$을 풀면 $x = -2/3, y = -8/9$. 영역 바깥의 점이므로 무시한다.

(아래쪽 경계) 여기에서는 $y = 0$이므로 $0 \le x \le \sqrt{3}$에 대해 $f = -2x^2 + 8$이다. $f'(x) = -x$이고 $x = 0$일 때 $f'(x) = 0$이다. 끝점은 $x = 0, \sqrt{3}$이다. 따라서 후보점들은 $(0, 0)$과 $(\sqrt{3}, 0)$이다.

(왼쪽 경계) 여기에서는 $x = 0$이므로 $0 \le y \le 3$에 대해 $f = 2y + 8$이다. $f'(y) = 2$이고 0이 될 수 없다. 유일한 후보점은 끝점으로 $(0, 0)$과 $(0, 3)$이다.

(경계선) $y = 3 - x^2$이므로 이 식을 y에 대입하면 $0 \le x \le \sqrt{3}$에 대해 $f = 3x(3 - x^2) - 2x^2 + 2(3 - x^2) + 8 = -3x^3 - 4x^2 + 9x + 14$이다. 그러므로 $f'(x) = -9x^2 - 8x + 9$이고 임곗점에 해당하는 x는 약 0.65와 -1.5인데 -1.5는 영역 바깥의 점이므로 무시한다. 따라서 후보는 0.65와 양 끝값 $0, \sqrt{3}$이고 후보점은 $(0.65, 2.58), (0, 3), (\sqrt{3}, 0)$이다.

이 후보점들 중에서 최종 결정을 하기 위해 값을 계산하면 $f(0, 0) = 8, f(0, 3) = 14, f(\sqrt{3}, 0) = 2, f(0.65, 2.58) = 17.3$(근사값) 이다. 따라서 최솟값은 2이고 최댓값은 근사적으로 17 이다.



(b) (임계점) (a)에서와 동일하다. 여기서도 영역 바깥의 점이므로 무시한다.

(경계 $x + y = 2$) $0 \le x \le 2$에 대해 $f = 3x(2 - x) - 2x^2 + 2(2 - x) + 8 = -5x^2 + 4x + 12$. 그러면 $f'(x) = -10x + 4$ 그러므로 $x = 4/10$이 임곗값이고 끝점은 $x = 0$과 $x = 2$이다. 따라서 후보점은 $(\frac{4}{10}, \frac{16}{10}), (0, 2), (2, 0)$이다.

(아랫쪽 경계) 여기에서는 $y = 0$이므로 $0 \le x \le 2$에 대해 $f = -2x^2 + 8$. $f'(x) = -4x$는 $x = 0$일 때 0이다. 따라서 후보점은 $(0, 0)$과 $(2, 0)$.

(왼쪽 경계) 여기에서는 $x = 0$이므로 $0 \le y \le 2$에 대해 $f = 2y + 8$. $f'(y) = 2$는 0이 될 수 없다. 따라서 유일한 후보점은 양끝점인 $(0, 0)$과 $(0, 2)$이다.

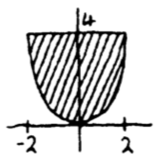
이 후보점들 중에서 최종 결정을 하기 위해 값을 계산하면 $f(0, 0) = 8, f(0, 2) = 12, f(2, 0) = 0, f(\frac{4}{10}, \frac{16}{10}) = \frac{64}{5}$. 따라서 최솟값은 0이고 최댓값은 $\frac{64}{5}$이다.

(c) (임곗값) $\partial f/\partial x = 2$이므로 0이 될 수 없다. 따라서 임계점은 없다.

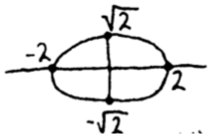
(경계선) $y = x^2$을 대입하면 $-2 \le x \le 2$에 대해 $f = 2x - 3x^2$. $f'(x) = 2 - 6x$이고 $x = \frac{1}{3}$이 임곗점이다. 양끝은 -2와 2이므로 후보점은 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}), (\pm 2, 4)$이다.

(위쪽 경계) 여기에서는 $y = 4$이므로 $-2 \le x \le 2$에 대해 $f = 2x - 12$. $f'(x) = 2$이므로 0이 될 수 없다. 따라서 후보점들은 양끝점 $(\pm 2, 4)$ 뿐이다.

위 후보들에서의 값을 계산하면 $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}) = \frac{1}{3}$, $f(-2, 4) = -16$, $f(2, 4) = -8$. 따라서 최솟값은 -16이고 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다.



(d) $\partial f/\partial x = 2x + 2xy, \partial f/\partial y = x^2 - 1$. $2x + 2xy = 0, x^2 - 1 = 0$을 풀면 임계점 $(1, -1)$과 $(-1, -1)$을 얻는다. 경계에서는 $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$에 대해 $f = 4 - 2y^2 + (4 - 2y^2)y - y = 4 + 3y - 2y^2 - 2y^3$이므로 $f'(y) = 3 - 4y - 6y^2$은 약 $y = -1.1, 5$에서 0이 된다. 끝점은 $y = \pm\sqrt{2}$이다. 따라서 후보점들은 $(1, -1), (-1, -1), (0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{1.58}, -1.1), (\pm\sqrt{3.5}, 5)$이다. 최댓값은 $((\pm\sqrt{3.5}, 5)$에서$)$ 4.75이고 최솟값은 $(0, \sqrt{2})$에서 $-\sqrt{2} = -1.414$이다.



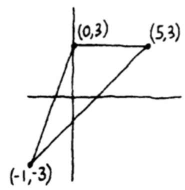
2. (a) (임계점) $\partial f/\partial x = 2x + 3y + 10, \partial f/\partial y = 2y + 3x$. $2x + 3y + 10 = 0, 3x + 2y = 0$을 풀면 임계점 $x = 4, y = -6$을 얻는다. 영역 바깥의 점이므로 무시한다.

(위쪽 경계) 여기에서는 $y = 3$이므로 $0 \le x \le 5$에 대해 $f = x^2 + 9 + 19x$이다. 그러면 $f' = 2x + 19$이고 $x = -\frac{19}{2}$이면 0인데 역시 영역 바깥의 점이다. 후보는 끝값인 $x = 0, 5$, 후보점은 $(0, 3)$과 $(5, 3)$이다.

(오른쪽 경계) 여기에서는 $y = x-2$이므로 $1 \le x \le 5$에서 $f = 5x^2+4$이고 $f'(x) = 10x$는 $x = 0$에서 0이다. 후보값은 $x = 0$과 끝값인 $x = -1, 5$이고 후보점은 $(0, -2), (-1, -3), (5, 3)$이다.

(왼쪽 경계) 여기에서는 $y = 6x+3$이므로 $-1 \le x \le 0$에 대해 $f = 19x^2 + (6x+3)^2 + 19x$이고 $f'(x) = 38x + 12(6x + 3) + 19$는 $x = -\frac{1}{2}$에서 0이다. 따라서 후보값은 $x = -\frac{1}{2}$와 끝값인 $x = -1, 0$이고 후보점은 $(-\frac{1}{2}, 0), (-1, -3), (0, 3)$이다.

각 후보점들에서 값을 계산하면 $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{19}{4}, f(-1, -3) = 9, f(5, 3) = 129, f(0, -2) = 4, f(0, 3) = 9$이고 최댓값은 $(5, 3)$에서 최솟값은 $(-\frac{1}{2}, 0)$에서 갖는다.



(b) $\partial f/\partial x = 2x + 1, \partial f/\partial y = 4y$. $2x + 1 = 0, 4y = 0$을 풀면 임계점 $(-\frac{1}{2}, 0)$을 얻는다. 경계에서는 $y^2 = 1 - x^2$이므로 $-1 \le x \le 1$에 대해 $f = -x^2 + x + 2$이고 $f'(x) = -2x + 1$은 $x = \frac{1}{2}$에서 0이다. 끝점은 $x = \pm 1$이다. 그러면 $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}, f(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{9}{4}, f(1, 0) = 2, f(-1, 0) = 0$이다. 최댓값은 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$에서 최솟값은 $(-\frac{1}{2}, 0)$에서 갖는다.

3. (a) (x, y)가 ∞에 있는 경계로 다가가면, $-x^2 - y^2$ 항 때문에 $f\infty - \infty$이다. 따라서 최솟값은 $-\infty$이다. 최댓값은 임계점에서 갖게 될 것이다. $\partial f/\partial x = -2 - 2x, \partial f/\partial y = 6 - 2y$는 $x = -1, y = 3$일 때 0이다. 따라서 최댓값은 $f(-1, 3) = 10$이다.

(b) $x = 0$이고 $y \to \infty$이면 (즉, 양의 y-축을 따라 무한대 경계로 점이 다가가면) $f \to \infty$이다. 만일 $x = 0$이고 $y \to -\infty$이면 (즉, 음의 y-축을 따라 무한대 경계로 다가가면) $f \to -\infty$이다. 따라서 최댓값은 ∞이고 최솟값은 $-\infty$이다.

(c) 어떤 경로를 따라 가더라고 무한대 경계로 다가가면 $f \to \infty$ 이다. 임계점에서 최솟값을 갖게 될 것이다. $\partial f/\partial x = 2x - y + 2, \partial f/\partial y = -x + 2y + 2$ 는 $x = -2, y = 2$ 일 때 0 이다. 따라서 최솟값은 $f(-2,-2) = -8$, 최댓값은 ∞ 이다.

(d) y-축을 따라 가면 $f \to -\infty$. x-축을 따라 동쪽으로 가면 $f \to \infty$. 따라서 최댓값은 ∞, 최솟값은 $-\infty$

4. 평면 위의 점 $(x, y, 14-3x-2y)$ 에서 원점까지의 거리는 $s(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + (14 - 3x - 2y)^2}$ 이고 x, y 전체 평면에서 이 함수의 최솟값을 찾고자 한다. 무한대 경계에서 s 는 ∞ 으로 최댓값을 갖는다. 임계점에서 최솟값을 갖을 것이다. 계산의 편의를 위해 제곱근 내부의 함수 $r(x,y) = x^2 + y^2 + (14 - 3x - 2y)^2$ 을 생각한다. $\partial r/\partial x = 2x + 2(14 - 3x - 2y) \cdot -3, \partial r/\partial y = 2y + 2(14 - 3x - 2y) \cdot -2$ 이고 $x = 3, y = 2$ 일 때 0 이 된다. 이 값에 해당하는 z 값은 평면의 방정식으로부터 $z = 1$ 이다. 따라서 원점에서 가장 가까운 점은 $(3, 2, 1)$ 이다.

5. (a) $\dfrac{|2(1) - 2(3) + 0 + 10|}{\sqrt{4+4+1}} = 2$

(b) 평면 위의 일반적인 한 점 $(x, y, -2x + 2y - 10)$ 을 생각하자. 이 점으로부터 $(1, 3, 0)$ 까지의 거리는 $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (-2x + 2y - 10)^2}$ 이다. x 또는 y 가 무한대로 다가갈 때 최댓값은 ∞ 이다. 임계점에서 최솟값을 갖을 것이다. 계산의 편의를 위해 제곱근 내부의 함수 $r(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 + (-2x + 2y - 10)^2$ 을 생각한다. $\partial r/\partial x = 2(x-1) - 4(-2x + 2y - 10), \partial r/\partial y = 2(y-3) + 4(-2x + 2y - 10)$ 이고 $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{13}{3}$ 일 때 0 이다. 이 값에 해당하는 z 값은 평면의 방정식으로부터 $x = -\frac{2}{3}$ 이다. $(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}, -\frac{2}{3})$ 에서 $(1, 3, 0)$ 까지의 거리가 2 로 최솟값이다.

6. 첫 번째 직선 위의 점 $(2 + t, 3 - t, 4 + 2t)$ 와 두 번째 직선 위의 점 $(1 + s, 2 + s, 7 + 3s)$ 를 생각하면, 두 점 사이의 거리는 $f = \sqrt{(1 + t - s)^2 + (1 - t - s)^2 + (-3 + 2t - 3s)^2}$ 이다. 제곱근 내부의 함수 $r(t,s) = (1 + t - s)^2 + (1 - t - s)^2 + (-3 + 2t - 3s)^2$ 를 생각하면 $\partial r/\partial s = -2(1+t-s) - 2(1-t-s) - 6(-3+2t-3s), \partial r/\partial t = 2(1+t-s) - 2(1-t-s) + 4(-3+2t-3s)$ 이고 $s = -\frac{1}{5}, t = \frac{4}{5}$ 일 때 0 이다. f 의 최댓값은 $s \to \pm\infty, t \to \pm\infty$ 일 때 ∞ 이고, 최솟값은 $s = -\frac{1}{5}, t = \frac{4}{5}$ 일 때이다. 즉 $(\frac{14}{5}, \frac{11}{5}, \frac{28}{5})$ 와 $(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, \frac{32}{5})$ 사이의 거리가 최소이다.

7. 탱크 바닥의 두 변의 길이를 x 와 y 라고 하자. 부피가 256 이므로 높이는 $256/xy$ 이다. 겉넓이는 $x \geq 0, y \geq 0$ 에 대해

$$A(x,y) = xy + 2x\frac{256}{xy} + 2y\frac{256}{xy} = xy + \frac{512}{y} + \frac{512}{x}$$

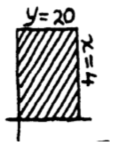
이다 (아래 그림 참조)

(a) $x, y \to \infty$ 이면 (즉 무한대 경계로 다가가면) $A \to \infty$ 이다. 키가 낮고 밑바닥이 넓은 형태의 탱크 모양에 해당한다. $x \to 0+$ 이거나 $y \to 0+$ 이면 $A \to \infty$ 이다. 키가 매우 크고 밑바닥이 작은 형태의 탱크 모양에 해당한다. 두 경우 모두 최악의 선택이고 최적의 경우는 이 두 경우 사이에 있다.

(b) (a)에서 경계에서는 면적이 최대가 되는 것을 보았다. 최솟값을 구하기 위해 임계점을 찾는다. $\partial A/\partial x = y - 512/s^2, \partial A/\partial y = x - 512/y^2$ 이고 $x^2y = 512, y^2x = 512$ 일 때 즉 $x = 8, y = 8$ 일 때 0이다. 따라서 최고의 탱크 규격은 $8 \times 8 \times \frac{256}{64}$ 이다.

(c) 아래 그림과 같이 새로운 영역에서 찾는다. (b)에서 구한 임계점은 이 영역에 포함되지 않는다. 그러므로 경계에서 최솟값을 갖게 된다. x-축과 y-축에서는 $A = \infty$ 가 된다. 직선 $x = 4$ 위에서는 $0 < y \leq 20$에 대해 $A = 4y + 512/y + 512/4$ 이고 $A'(y) = 4 - 512/y^2$ 은 $y = \sqrt{128}$ 일 때 0이다. 끝점은 $y = 20$ 이다.

직선 $y = 20$ 위에서는 $0 < x \leq 4$에 대해 $A = 20x + \frac{512}{20} + 512/x$ 이고 $A'(x) = 20 - 512/x^2$ 은 해당 영역에서 0이 되지 않는다. 따라서 유일한 후보는 끝점인 $x = 4$ 이다. 후보점에서 $A(4, \sqrt{128}) = 4\sqrt{128} + \frac{512}{\sqrt{128}} + \frac{512}{4}$, $A(4, 20) = 80 + \frac{512}{20} + \frac{512}{4}$ 이고 첫 번째 값이 더 작으므로 최적의 탱크 규격은 $4 \times \sqrt{128} \times \frac{256}{4\sqrt{128}}$ 이다.



11.6 그래디언트

1. ∇온도 $= (y^2 + 6, 2xy)$, 점 (1,2)에서 ∇온도 $= (10, 4)$.

   (a) 남서쪽(SW) $= (-1, -1)$ 이므로 D_{SW}온도 $= \dfrac{\nabla 온도 \cdot SW}{\|SW\|} = \dfrac{-14}{\sqrt{2}}$ (온도는 미터당 $14/\sqrt{2}$ 씩 떨어지는 중이다)

   (b) $\overrightarrow{PQ} = (2, -6), \dfrac{\nabla 온도 \cdot \overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \dfrac{-4}{\sqrt{40}}$

   (c) 방향은 남쪽, 즉 $-\vec{j}$ 이다. 따라서 ∇온도 $\cdot (-\vec{j}) = -4$

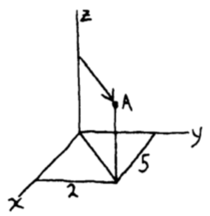
   (d) $\|\nabla 온도\| = \sqrt{116}$

   (e) 서북서 방향(WNW)은 x-축과 $157.5°$ 각도를 이룬다(아래 그림 참조) WNW 단위 벡터는 $(\cos 157.5°, \sin 157.5°)$ 이다.

$$D_{WNW}온도 = \nabla 온도 \cdot WNW = 10\cos 157.5° + 4\sin 157.5°$$

2. ∇온도 $= (2xy, x^2)$. 점 A에서 ∇온도 $= (12, 4)$. 북동쪽 방향 $NE = (1, 1)$, D_{NE}온도 $= \dfrac{\nabla 온도 \cdot NE}{\|NE\|} = \dfrac{16}{\sqrt{2}}$. 두 선수 모두 미터당 $16/\sqrt{2}$ 만큼의 온도 상승을 느낀다.

3. (아래 그림 참조) $\nabla f = (y, x - 2y, 1)$ 이고 점 A에서 $\nabla f = (2, 1, 1)$



(a) z-축에서 멀어지는 벡터는 $\vec{u} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$, $(\nabla f \cdot \vec{u})/\|\vec{u}\| = 12/\sqrt{29}$

(b) ∇f와 수직인 임의의 벡터, 예를 들면 $(-1, 2, 0), (5, -8, -2)$ 등등

(c) 점 A에서 $\nabla f = (2, 1, 1)$. 점 A에 있는 물체는 $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$의 방향으로 움직이므로 미터당 $(\nabla f \cdot \overrightarrow{AB})/\|\overrightarrow{AB}\| = 5/\sqrt{6}$ 만큼의 온도 변화를 느낀다. 점 B에서는 $\nabla f = (4, -2, 1)$ 이고 B에 있는 물체는 $\overrightarrow{BA} = (-1, -2, 1)$의 방향으로 움직이므로 미터당 $(\nabla f \cdot \overrightarrow{BA})/\|\overrightarrow{BA}\| = -1/\sqrt{6}$ 만큼의 온도 변화를 느낀다. 이 두 물체가 가운데 지점 $(\frac{11}{2}, 3, \frac{3}{2})$ 에서 만날 때 $\nabla f = (3, -\frac{1}{2}, 1)$ 이다. 첫번째 물체는 $\overrightarrow{AB}$의 방향을 가지므로 미터당 $(\nabla f \cdot \overrightarrow{AB})/\|\overrightarrow{AB}\| = 3/\sqrt{6}$ 만큼 온도가 상승하는 것을 느낀다. 다른 물체는 미터당 $3/\sqrt{6}$ 만큼 온도가 하강하는 것을 느낀다.

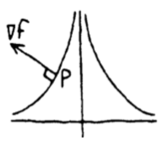
(d) $-\nabla f = -2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$의 방향이다. 이 방향으로 압력은 미터당 $\|\nabla f\| = \sqrt{6}$ 만큼씩 감소한다.

4. 움직임 방향은 접선 벡터 $\vec{u}$ 이다. (아래 그림 참조) 이 방향은 ∇f와 둔각을 이루고 $\vec{u}$ 방향으로의 ∇f의 성분이 음수이므로 물체는 온도가 하강하는 것을 느낀다.

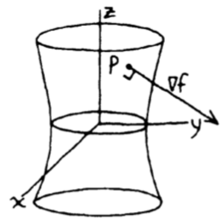
5. ∇f는 $3\vec{i} + 2\vec{j}$의 양의 상수배이므로 c가 양수일 때 $\nabla f = c(3\vec{i} + 2\vec{j})$ 이다. 또한 $\|\nabla f\| = 2$ 이므로 $c\sqrt{13} = 2$ 로부터 $c = 2/\sqrt{13}$ 이고 $\nabla f = (6/\sqrt{13}, 4/\sqrt{13})$ 이다. $D_{\text{북쪽}} f = \nabla f \cdot \vec{j} = 4/\sqrt{13}$

6. $(1, 1)$을 향하는 벡터는 $\vec{u} = -\vec{j}$ 이고 $(7, 10)$을 향하는 벡터는 $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ 이다. 점 A에서의 ∇f를 (a, b)라고 하자. 주어진 조건에 의해 $(\nabla f \cdot \vec{u})/\|\vec{u}\| = 2$로부터 $-b = 2, b = -2$ 이다. 또한 $(\nabla f \cdot \vec{v})/\|\vec{v}\| = -4$ 이므로 $\frac{1}{10}(6a + 8b) = -4, a = -4$ 이다. 그러면 점 A에서 $\nabla f = (-4, -2)$ 이다. 이 방향이 온도가 가장 최대로 상승하는 방향이고 그 비율은 미터당 $\|\nabla f\| = \sqrt{20}$ 이다.

7. (a) $f(-1, 2) = 2$ 이므로 P는 2-등위 집합 $x^2 y = 2$ 위에 있다 (아래 그림 참조). $\nabla f = (2xy, x^2)$ 이고 점 P에서 $(-4, 1)$ 이다.



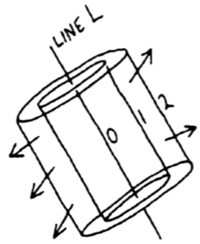
(b) $f(1, 2, 1) = 12$ 이므로 P는 12-등위 집합 $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4 = 12, x^2 + 2y^2 - z^2 = 8$ 위에 있다. (아래 그림 참조) $\nabla f = (2x, 4y, -2z)$ 이고 점 P에서 (2, 8, -2) 이다.



8. 그래디언트는 등위 집합에 수직이고 더 높은 등위 집합을 향한다. (아래 그림 참조) 함수 f 가 ∇f 의 방향으로 미터당 변화하는 양이 함수 g 가 ∇g 의 방향으로 미터당 변화하는 양보다 더 크게 변하고 있다. 왜냐하면 문제에서 주어진 그림에 의하면 f 의 레벨은 등위 집합간 10 만큼씩 점프하는 데 반해 g 는 비슷하게 떨어져 있는 등위 집합들간에 겨우 1 만큼씩만 점프하기 때문이다. 따라서 ∇f 가 ∇g 보다 더 길게 나타나 있다.

9. 극대/극소에서는 편미분이 0 이므로 $\nabla f = \vec{0}$ 이다.

10. 거리는 음수일 수 없으므로 음의 등위 집합은 없다. 직선 L은 0-등위집합이다. 2-등위 집합 (직선으로부터 거리가 2 인 점들)은 L을 축으로 하고 반지름이 2 인 원기둥 등이다 (아래 그림 참조). 그래디언트는 등위 집합에 수직이고 더 높은 등위 집합을 가리키므로 각 원기둥의 바깥 방향을 가리킨다. 모든 ∇f 는 길이가 1 인데 직선 L로부터 ∇f 의 방향으로 (즉 L로부터 수직 방향으로) 걸어 나간다면, (f 는 L까지의 거리이므로) f 는 1 미터 갈 때마다 1 씩 증가하기 때문이다.



11. (a) $1 \times 2 \times 6 = 12$

    (b) $z = 12/xy$, $\nabla z = (-12/x^2y, -12/xy^2)$, $\nabla z\Big|_{x=1,y=2} = -6\vec{i} - 3\vec{j}$. $-6\vec{i} - 3\vec{j}$ 방향으로의 경사가 가장 급하다. 점 P에서 이 방향으로의 기울기는 $\|\nabla z\| = \sqrt{45}$ 이다.

    (c) 남동쪽 (SW) $= \vec{i} - \vec{j}$, $\partial z/\partial SE = (\nabla z \cdot SE)/\|SE\| = -3/\sqrt{2}$. 이 방향은 내려가는 길이고 기울기는 $-3/\sqrt{2}$ 이다.

    (d) $\nabla(xyz) = (xy, xz, xy)$ 점 P에서는 $12\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ 이고 점 P에서 이 곡면에 수직 방향이다. 따라서 접평면의 방정식은 $12(x-1) + 6(y-2) + 2(z-6) = 0$, $6x + 3y + z = 18$ 이고, 법선의 방정식은 $x = 1 + 12t, y = 2 + 6t, z = 6 + 2t$ 이다.

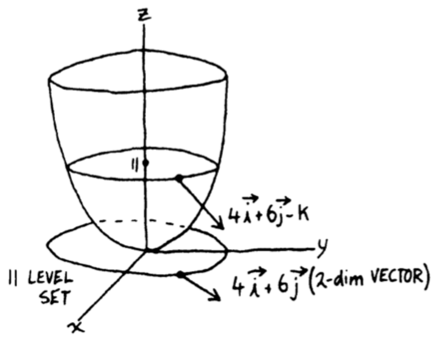
12. (a) 그래프의 방정식은 $z = 3x^2 - 2y^2$ 이고 $1 = 3 - 2$ 이므로 점 P는 이 그래프 위의 점이다.

(b) $\nabla z = 6x\vec{i} - 4y\vec{j}$, $\nabla z\Big|_{x=1,y=-1} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$. $6\vec{i} + 4\vec{j}$ 방향으로의 경사가 가장 급하다. 점 P 에서의 이 방향으로의 기울기는 $\|\nabla z\| = \sqrt{52}$ 다.

(c) $\partial z/\partial SE = (\nabla z \cdot SE)/\|SE\| = 2/\sqrt{2}$. 그러므로 이 방향은 올라가는 길이고 기울기는 $2/\sqrt{2}$ 이다.

(d) 곡면은 $z - 3x^2 + 2y^2 = 0$, $\nabla(z - 3x^2 + 2y^2) = (-6x, 4y, 1)$, 점 P 에서는 $\nabla = (-6, -4, 1)$ 이다. 이 벡터는 곡면에 수직이고 접평면의 방정식은 $-6(x-1) - 4(y+1) + (z-1) = 0$, $6x + 4y - z = 1$ 이고 법선의 방정식은 $x = 1 - 6t, y = -1 - 4t, z = 1 + t$ 이다.

13. (a) $\nabla f = (4x, 2y)$, $\nabla f\Big|_{x=1,y=3} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$.



(b) $\nabla(2x^2 + y^2 - z) = (4x, 2y, -1)$ 이고 $x = 1, y = 3$ 에서는 $\nabla = 4\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$ 이다.

(c) 벡터 $4\vec{i} + 6\vec{j}$ 는 점 (1,3) 을 지나는 f 의 등위 집합과 수직이다. $f(1,3) = 11$ 이므로 이 집합은 11-등위 집합, $2x^2 + y^2 = 11$ 이다. 벡터 $4\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$ 는 점 (1, 3, 11) 에서 f 의 그래프, $z = 2x^2 + y^2$ 와 수직이다.

14. (a) $\nabla(x^2 + 2y^2 + 3z^2) = (2x, 4y, 6z)$ 이고 점 P 에서는 (2, 4, 12) 이다. 이 벡터는 지구 표면과 수직이다.

(b) ∇온도 $= \nabla(2xz + y^2 + 6) = (2z, 2y, 2x)$ 이고 점 P 에서는 (4, 2, 2) 이다. 발사 방향은 $\vec{n} = (2, 4, 12)$ 이므로 ∂온도$/\partial\vec{n} = (\nabla$온도$\cdot \vec{n})/\|\vec{n}\| = 40/\sqrt{164}$ 이다.

(c) ∇온도와 수직인 임의의 방향을 선택한다. 예를 들면 (1, -1 -1), (-3, 2, 4), (0, -2. 2) 등등

(d) 지구 안쪽으로 향하지 않기 위해서는 바깥쪽 법선 벡터 $\vec{n}$ 과 둔각을 이루면 안 된다. 그런데 $(1, -1, -1) \cdot \vec{n}$ 은 음수이므로 $(1, -1, -1)$ 은 지구 안쪽으로 향한다. 따라서 $(-1, 1, 1)$ 로 바꾸어 준다. $(-3, 2, 4) \cdot \vec{n}$ 은 양수이므로 $(-3, 2, 4)$ 는 문제 없다.

(e) 점 P 가 놓여 있는 북반구의 방정식은 $z = \sqrt{\frac{1}{3}(15 - x^2 - 2y^2)}$ 이다. 그러면 $\nabla z = (-\frac{1}{3}x/\sqrt{\ }, -\frac{2}{3}y/\sqrt{\ })$, $\nabla z\Big|_{x=1,y=1} = -\frac{1}{6}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$. 어머니가 향하는 방향으로의 기울기는 $\partial z/\partial NE = (\nabla z \cdot NE)/\|NE\| = -1/2\sqrt{2}$.

11.7 미분소와 완전 미분방정식

1. (a) $d(y/x)$ 는 분수식의 법칙에 의해 바로 구할 수 있다.

(b)

$$\begin{aligned} d(x^2+y^2)^{-1} &= -(x^2+y^2)^{-2}d(x^2+y^2) \quad \text{(연쇄 법칙)} \\ &= -(x^2+y^2)^{-2}(2xdx+2ydy) \\ &= \frac{-2xdx-2ydy}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

(c) $d(\pm\sqrt{x^2+y^2}) = \pm\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}d(x^2+y^2) = \dfrac{2xdx+2ydy}{\pm 2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{xdx+ydy}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$

(d) $\dfrac{1}{x^2+y^2}d(x^2+y^2) = \dfrac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}$

(e)

$$\frac{1}{1+(y/x)^2}d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{xdy-ydx}{x^2} = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

2. $x = r\cos\theta$ 이므로 $dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$. $y = r\sin\theta$ 이므로 $dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$

3. (a) $p = 2xy, q = y, \partial q/\partial x = 0, \partial p/\partial y = 2x$, 같지 않기 때문에 주어진 형식은 완전 미분소가 아니다.

   (b) $\partial q/\partial x = \partial p/\partial y = 3x^2$ 이므로 완전 미분소이다. p를 x에 대해 역미분하면 $\frac{1}{4}x^4 + x^3y$를 얻고 이 식을 다시 y에 대해 편미분하면 x^3을 얻는다. q와 비교하면 $\frac{1}{4}y^4$을 붙여야 하고 최종 답은 $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + x^3y + \frac{1}{4}y^4 + C$.

   (c) $f(x,y) = -y/x + 5y + C$.

4. $\partial q/\partial x = \partial p/\partial y$ 이여야 한다. $\partial q/\partial x = 3xy^2$, $q = \frac{3}{2}x^2y^2 + f(y)$, 여기서 $f(q)$는 임의의 q의 함수이면 된다. 예를 들면 $q = \frac{3}{2}x^2y^2 + y^3\sin y + 7$

5. (a) $d(2x^3 + xy^2 + y^3) = 0$, 음함수 형태의 해는 $2x^3 + xy^2 + y^3 = C$.

   (b) $d(x^3 + xy) = 0$, 음함수 형태의 해는 $x^3 + xy = C$, 양함수 형태의 해는 $y = (C - x^3)/x$

   (c) $(x - y\cos x)dx - (y + \sin x)dy = 0$, $d\left(\frac{1}{2}x^2 - y\sin x - \frac{1}{2}y^2\right) = 0$, 음함수 형태의 해는 $\frac{1}{2}x^2 - y\sin x - \frac{1}{2}y^2 = C$

   (d) $e^{xy}dx - dy = 0$. $\partial q/\partial x = 0, \partial p/\partial y = xe^{xy}$ 로 서로 같지 않으므로 완전 미분소가 아니다.

   (e) $(2r\cos\theta - 1)dr - r^2\sin\theta d\theta = 0$, $d(r^2\cos theta - r) = 0$, 음함수 형태의 해는 $r^2\cos\theta - r = C$

   (f) 완전 미분소가 아니다.

   (g) 모든 항들을 좌변으로 옮길 수도 있고 더 낫게는 주어진 식 그대로 각 변이 완전 미분소이다 즉 $d(\sin x\cos y) = d(\frac{1}{4}x^4)$. 음함수 형태의 해는 $\sin x\cos y = \frac{1}{4}x^4 + C$

   (h) $(ye^{-x} - \sin x)dx - (e^{-x} + 2y)dy = 0$, $d(-ye^{-x} + \cos x - y^2) = 0$, 음함수 형태의 해는 $-ye^{-x} + \cos x - y^2 = C$.

6. (a) $d(x^2y + \frac{1}{2}y^2) = 0$, 음함수 형태의 해는 $x^2y + \frac{1}{2}y^2 = C$. $x = 1, y = 4$ 이면 $C = 12$ 이므로 음함수 형태의 특수해는 $x^2y + \frac{1}{2}y^2 = 12$

   (b) $d(-\cos(2x + 3y)) = 0$, 음함수 형태의 해는 $-\cos(2x + 3y) = C$. $x = 0, y = \frac{1}{2}\pi$ 이면 $C = -\cos\frac{3}{2}\pi$, $C = 0$. 그러므로 특수해는 $\cos(2x + 3y) = 0$.

(c) 양변이 완전 미분소이다. $d\ln(x+y) = d(x)$ 이므로 $\ln(x+y) = x + C$ 이다. $x = 0, y = 1$ 이면 $C = 0$. 음함수 형태의 해는 $\ln(x+y) = x$. 그러면 $x + y = e^x$, 양함수 형태의 해는 $y = e^x - x$

7. (a) $d(\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{3}{2}y^2) = 0$, $\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{3}{2}y^2 = K$
   (b) $(x^2+2)dx = -3ydy$, $\frac{1}{3}x^3 + 2x = -\frac{3}{2}y^2 + K$

8. (a) 적분 인자 $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 를 사용하면 $dx = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, $d(x) = d\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$, $x = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + K$.
   (b) 적분 인자 $\dfrac{1}{y^2}$ 을 사용하면 $\dfrac{ydx - xdy}{y^2} = dx$, $\dfrac{x}{y} = x + K$, $y = \dfrac{x}{x+K}$
   (c) 적분 인자 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 를 사용하면 $dy = \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $y = \sqrt{x^2+y^2} + K$
   (d) 적분 인자 $\dfrac{2}{x^2+y^2}$ 을 사용하면, $\dfrac{2xdx + 2ydy}{x^2+y^2} = 2dy$, $\ln(x^2+y^2) = 2y + K$.